

**Exercice 1** *Etats GHZ : physique quantique contre éléments de réalité locaux*

On s'intéresse dans cet exercice à un système de trois spins  $1/2$  préparés dans l'état  $|\Psi\rangle = (|+++ \rangle + |-- \rangle)/\sqrt{2}$ , appelé état GHZ (des initiales de Greenberger, Horne et Zeilinger, qui ont introduit cet état en 1989), où  $|+\rangle = |\uparrow\rangle$  et  $|-\rangle = |\downarrow\rangle$  désignent les états propres usuels de  $\hat{S}_z$ . Après préparation dans cet état, les spins sont distribués à trois acteurs, Alice (A), Bob (B) et Charlie (C). Par soucis de clarté, on note donc cet état

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_A |+\rangle_B |+\rangle_C + |-\rangle_A |-\rangle_B |-\rangle_C). \quad (1)$$

Par la suite, on dénote par  $|\pm_x\rangle_j$  et  $|\pm_y\rangle_j$  les états propres de  $\hat{S}_x^{(j)}$  et  $\hat{S}_y^{(j)}$ ,  $j = A, B, C$ . On rappelle que ces derniers sont reliés aux états propres de  $\hat{S}_z^{(j)}$  par

$$|\pm_x\rangle_j = \frac{|+\rangle_j \pm |-\rangle_j}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$|\pm_y\rangle_j = \frac{|+\rangle_j \pm i|-\rangle_j}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Alice, Bob et Charlie peuvent chacun décider de mesurer la composante selon  $x$ ,  $y$  ou bien  $z$  de leur spin. Par simplicité, on note  $\pm 1$  les résultats de mesure, au lieu de  $\pm\hbar/2$ . Alice, Bob et Charlie sont suffisamment séparés spatialement pour que l'on puisse considérer en toute certitude que les mesures qu'ils effectuent sur leur spin respectif sont indépendantes (la mesure qu'effectue par exemple  $A$  ne peut influencer de façon "subluminique" la mesure effectuée par  $B$ ).

1. Exprimer l'état  $|\Psi\rangle$  dans la base  $\{|\pm_y\rangle_A |\pm_y\rangle_B |\pm_x\rangle_C\}$ .
2. Quelle est la probabilité qu'Alice trouve  $+1$  lorsqu'elle mesure la composante selon  $y$  de son spin dans l'état  $|\Psi\rangle$ ? Quels sont les couples de résultats possibles et les probabilités associées lorsqu'Alice et Bob mesurent tous deux la composante  $y$  de leur spin dans l'état  $|\Psi\rangle$ ?
3. Même question à propos des triplets de résultats lorsqu'Alice et Bob mesurent leur spin selon  $y$  et Charlie mesure le sien selon  $x$ . On nomme mesure  $yyx$  ce type de mesure effectuée conjointement par Alice, Bob et Charlie.
4. Montrer que dans une mesure  $yyx$  les résultats obtenus par deux des trois acteurs (par exemple Alice et Bob) permettent de prédire avec certitude le résultat obtenu par le troisième acteur (Charlie dans notre exemple). On parle alors de corrélation parfaite des résultats de mesure.
5. Montrer qu'une telle corrélation parfaite s'observe aussi pour les mesures  $xyy$  et  $xyx$ .

L'hypothèse de l'existence d'*éléments de réalité locaux* expliquant les corrélations parfaites observées dans les mesures ci-dessus sur l'état  $|\Psi\rangle$  consiste à supposer que chaque spin  $j$  porte en lui des "éléments de réalité"  $X_j \in \{-1, +1\}$  et  $Y_j \in \{-1, +1\}$  déterminant avec certitude quels seront les résultats de mesure à la fois selon  $x$  et selon  $y$ .

6. Dédire des questions 1 et 5 que ces éléments de réalité locaux expliquant les mesures  $yyx$ ,  $xyx$  et  $xyy$  doivent satisfaire

$$Y_A Y_B X_C = -1, \quad Y_A X_B Y_C = -1, \quad X_A Y_B Y_C = -1. \quad (4)$$

7. Montrer que les équations (4) impliquent

$$X_A X_B X_C = -1. \quad (5)$$

8. Exprimer l'état  $|\Psi\rangle$  dans la base  $\{|\pm_x\rangle_A |\pm_x\rangle_B |\pm_x\rangle_C\}$ . Quels sont les triplets de résultats possibles lors d'une mesure  $xxx$  sur l'état  $|\Psi\rangle$ ?
9. En conclure que la physique quantique et l'hypothèse des éléments de réalité locaux compatibles avec les mesures  $yyx$ ,  $xyx$  et  $xyy$  produisent des prédictions mutuellement exclusives pour les résultats de la mesure  $xxx$ .

Tout comme les expériences montrant la violation des inégalités de Bell, les expériences avec les états GHZ [cf par exemple Pan *et al.*, Nature **403**, 515 (2000)] ont donné raison à la physique quantique et invalidé l'hypothèse de l'existence d'éléments de réalité locaux; dans un cas comme dans l'autre les barres d'erreur liées aux imperfections expérimentales ne laissent en effet guère place au doute.

10. En quoi l'opposition des prédictions de physique quantique avec l'hypothèse des éléments de réalité locaux est-elle néanmoins plus flagrante (et plus fondamentale, pourrait-on dire) dans le cas des états GHZ que dans le cas des inégalités de Bell?