Exercice 1 *Etats GHZ*

1. Les relations

$$|+\rangle = \frac{|+_x\rangle + |-_x\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|+_y\rangle + |-_y\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

$$|-\rangle = \frac{|+_x\rangle - |-_x\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|+_y\rangle - |-_y\rangle}{i\sqrt{2}} \tag{2}$$

permettent de réécrire $|\Psi\rangle$ sous la forme

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg[&\frac{|+_y\rangle_A + |-_y\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+_y\rangle_B + |-_y\rangle_B}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+_x\rangle_C + |-_x\rangle_C}{\sqrt{2}} \\ &+ \frac{|+_y\rangle_A - |-_y\rangle_A}{i\sqrt{2}} \otimes \frac{|+_y\rangle_B - |-_y\rangle_B}{i\sqrt{2}} \otimes \frac{|+_x\rangle_C - |-_x\rangle_C}{\sqrt{2}}\Bigg] \\ = \frac{1}{2}\Big[&|+_y\rangle_A |+_y\rangle_B |-_x\rangle_C + |+_y\rangle_A |-_y\rangle_B |+_x\rangle_C \\ &+ |-_y\rangle_A |+_y\rangle_B |+_x\rangle_C + |-_y\rangle_A |-_y\rangle_B |-_x\rangle_C\Big].\end{aligned} \tag{3}$$

2. Notons $P_A^y(+1)$ la probabilité qu'Alice mesure $+1$ $(+\hbar/2)$ pour la composante y de son spin. Cette probabilité est donnée par

$$\begin{aligned}P_A^y(+1) &= \|(|+_y\rangle\langle +_y|_A \otimes \mathbb{1}_B \otimes \mathbb{1}_C)|\Psi\rangle\|^2 \\ &= \left\|\frac{1}{2}|+_y\rangle_A |+_y\rangle_B |-_x\rangle_C + \frac{1}{2}|+_y\rangle_A |-_y\rangle_B |+_x\rangle_C\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2},\end{aligned} \tag{4}$$

ce qui traduit le fait que dans la décomposition (3) les termes comportant $|+_y\rangle_A$ contribuent à la moitié des poids.
La décomposition (3) montre aussi que lors d'une mesure jointe des spins d'Alice et de Bob selon la direction y les quatre couples $(+1, +1)$, $(+1, -1)$, $(-1, +1)$ et $(-1, -1)$ sont des résultats possibles et équiprobables: $P_{AB}^{yy}(+1, +1) = 1/4$ etc.

3. Les seuls triplets possibles dans une mesure yyx sont $(+1, +1, -1)$, $(+1, -1, +1)$, $(-1, +1, +1)$ et $(-1, -1, -1)$, et ces quatre résultats sont équiprobables. Pour être complet, on a le catalogue de probabilités suivant:

$$\begin{array}{ll} P_{ABC}^{yyx}(+1, +1, +1) = 0 & P_{ABC}^{yyx}(-1, +1, +1) = 1/4 \\ P_{ABC}^{yyx}(+1, +1, -1) = 1/4 & P_{ABC}^{yyx}(-1, +1, -1) = 0 \\ P_{ABC}^{yyx}(+1, -1, +1) = 1/4 & P_{ABC}^{yyx}(-1, -1, +1) = 0 \\ P_{ABC}^{yyx}(+1, -1, -1) = 0 & P_{ABC}^{yyx}(-1, -1, -1) = 1/4. \end{array} \tag{5}$$

On remarquera que seuls les triplets de résultats dont le produit vaut -1 ont une probabilité non nulle.

4. Les résultats de la question précédente montre que lorsqu'Alice et Bob obtiennent $(+1,+1)$ comme résultat combiné de la mesure de leur spin selon y, alors Charlie ne peut obtenir que -1 comme résultat de la composante x de son spin. Ceci se traduit formellement par les probabilités conditionnelles

$$P^{x|yy}_{C|AB}(+1|+1,+1) = \frac{P^{yyx}_{ABC}(+1,+1,+1)}{P^{yy}_{AB}(+1,+1)} = \frac{0}{1/4} = 0 \tag{6}$$

$$P^{x|yy}_{C|AB}(-1|+1,+1) = \frac{P^{yyx}_{ABC}(+1,+1,-1)}{P^{yy}_{AB}(+1,+1)} = \frac{1/4}{1/4} = 1. \tag{7}$$

Par des considérations similaires, on montre que lorsqu'Alice et Bob trouvent $(+1,-1)$, $(-1,+1)$ ou $(-1,-1)$, Charlie ne peut obtenir que $+1$, $+1$ ou -1, respectivement. Les résultats d'Alice et de Bob déterminent donc avec certitude le résultat de Charlie dans une mesure yyx. On montre également, en examinant les probabilités conditionnelles $P^{y|yx}_{B|AC}$ et $P^{y|yx}_{A|BC}$, que les résultats d'Alice et de Charlie déterminent ceux de Bob, et que ceux de Bob et de Charlie déterminent avec certitude ceux d'Alice. Il a y donc corrélation parfaite dans une mesure yyx, dans le sens où deux des trois résultats de mesure déterminent avec certitude le troisième résultat.

5. Au lieu de décomposer $|\Psi\rangle$ dans les bases $\{|\pm_y\rangle_A|\pm_x\rangle_B|\pm_y\rangle_C\}$ et $\{|\pm_x\rangle_A|\pm_y\rangle_B|\pm_y\rangle_C\}$, on peut arguer du fait que, étant donnée la symétrie de l'état $|\Psi\rangle$, les rôles d'Alice, de Bob et de Charlie sont interchangeables dans la mesure yyx: peu importe la localisation spatiale de la mesure x (ou le nom de l'acteur qui l'effectue) parmi les trois mesures. On aura donc également une corrélation parfaite pour les mesures yxy et xyy. Comme pour la mesure yyx, les triplets de résultats possibles correspondent toujours à un produit égal à -1.

6. Sous l'hypothèse qu'il existe des éléments de réalité X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C et Y_C à même de reproduire les résultats prévus par la mécanique quantique pour les mesures yyx, yxy et xyy sur l'état $|\Psi\rangle$, il faut notamment que ces éléments de réalité reproduisent les produits égaux à -1 des triplets (voir ci-dessus). Ceci se traduit donc par

$$Y_A Y_B X_C = -1, \qquad Y_A X_B Y_C = -1, \qquad X_A Y_B Y_C = -1. \tag{8}$$

7. Comme $Y_j^2 = 1$, le produit des trois égalités en (8) s'écrit

$$-1 = (Y_A Y_B X_C)(Y_A X_B Y_C)(X_A Y_B Y_C) = X_A X_B X_C Y_A^2 Y_B^2 Y_C^2 = X_A X_B X_C. \tag{9}$$

Autrement dit, l'existence de tels éléments de réalité imposerait que le produit de tout triplet résultat d'une mesure xxx soit -1.

8. Un calcul similaire à celui de la question 1 donne la décomposition suivante dans la base $\{|\pm_x\rangle_A|\pm_x\rangle_B|\pm_x\rangle_C\}$:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\Big[|+_x\rangle_A\,|+_x\rangle_B\,|+_x\rangle_C + |+_x\rangle_A\,|-_x\rangle_B\,|-_x\rangle_C + |-_x\rangle_A\,|+_x\rangle_B\,|-_x\rangle_C + |-_x\rangle_A\,|-_x\rangle_B\,|+_x\rangle_C\Big]. \tag{10}$$

Ceci se traduit par les probabilités

$$\begin{array}{ll} P^{xxx}_{ABC}(+1,+1,+1) = 1/4 & P^{xxx}_{ABC}(-1,+1,+1) = 0 \\ P^{xxx}_{ABC}(+1,+1,-1) = 0 & P^{xxx}_{ABC}(-1,+1,-1) = 1/4 \\ P^{xxx}_{ABC}(+1,-1,+1) = 0 & P^{xxx}_{ABC}(-1,-1,+1) = 1/4 \\ P^{xxx}_{ABC}(+1,-1,-1) = 1/4 & P^{xxx}_{ABC}(-1,-1,-1) = 0. \end{array} \tag{11}$$

Les triplets possibles sont $(+1,+1,+1)$, $(+1,-1,-1)$, $(-1,+1,+1)$ et $(-1,-1,-1)$, dont les produits valent tous $+1$.

9. La mécanique quantique prédit donc que le produit de tout triplet résultat d'une mesure xxx sur $|\Psi\rangle$ est nécessairement $+1$. Cette prédiction est contraire à celle qui découle des éléments de réalité susceptibles d'expliquer les mesures yyx, yxy et xyy (cf question 7).

10. La violation des inégalités de Bell, dans leurs formes diverses, montre l'opposition entre les prédictions *statistiques* de la physique quantique orthodoxe et des théories à variables cachées (éléments de réalité locaux); ces inégalités impliquent des probabilités et des fonctions de corrélation que l'on évalue, dans les expériences, en effectuant un grand nombre de mesures. Ici, l'opposition peut être considérée comme plus tranchée, car une seule mesure xxx suffit en principe à départager la physique quantique des variables cachées (le résultat d'une seule mesure est en effet potentiellement "produit égal à $+1$" ou "produit égal à -1", de type binaire, oui ou non, $P = 0$ ou $P = 1$). Avec un tel argument, on passe sous silence que pour déterminer avec grande certitude que le système est bien préparé dans l'état $|\Psi\rangle$ et que les mesures yyx etc. effectuées sur $|\Psi\rangle$ donnent bien des triplets de produit -1, il faut effectuer un grand nombre de mesures; les prédictions offertes par la physique quantique pour la mesure xxx correspondent néanmoins à des résultats certains, par opposition aux probabilités des inégalités de Bell, et c'est en cela qu'elles ne nécessitent en principe qu'une seule mesure.