

Exercice 1 *Particules fermioniques*

1. L'espace de Hilbert d'un spin $s = 1/2$ est de dimension $2s + 1 = 2$, l'espace de Hilbert de deux spins $1/2$, construit comme produit tensoriel de deux espaces dimensions 2, est donc de dimension $2 \times 2 = 4$. Sa base naturelle est la base produit, que l'on peut noter indifféremment

$$\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\} \quad (1)$$

ou

$$\{|\eta_{1/2}\eta_{1/2}\rangle, |\eta_{1/2}\eta_{-1/2}\rangle, |\eta_{-1/2}\eta_{1/2}\rangle, |\eta_{-1/2}\eta_{-1/2}\rangle\}, \quad (2)$$

avec

$$\langle\sigma_1\sigma_2|\eta_{\sigma'_1}\eta_{\sigma'_2}\rangle = \eta_{\sigma'_1}(\sigma_1)\eta_{\sigma'_2}(\sigma_2) = \delta_{\sigma_1,\sigma'_1}\delta_{\sigma_2,\sigma'_2}, \quad \sigma_i, \sigma'_i \in \{-1/2, 1/2\}. \quad (3)$$

En notant $|\chi_{\sigma'_1,\sigma'_2}\rangle = |\eta_{\sigma'_1}\eta_{\sigma'_2}\rangle$, tout état à deux spins $|\chi\rangle$ admet donc une décomposition

$$|\chi\rangle = \sum_{\sigma'_1,\sigma'_2} c_{\sigma'_1,\sigma'_2} |\eta_{\sigma'_1}\eta_{\sigma'_2}\rangle = \sum_{\sigma'_1,\sigma'_2} c_{\sigma'_1,\sigma'_2} |\chi_{\sigma'_1,\sigma'_2}\rangle, \quad (4)$$

et la fonction d'onde correspondante est alors

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \chi(\sigma_1, \sigma_2) = \langle\sigma_1, \sigma_2|\chi\rangle = c_{\sigma_1,\sigma_2}. \quad (5)$$

2. a. Pour tous $|\chi\rangle$ et $|\chi'\rangle$, on a

$$\begin{aligned} \chi' P \chi &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \chi'^*(\sigma_1, \sigma_2) \chi(\sigma_2, \sigma_1) = \left(\sum_{\substack{s_1=\sigma_2 \\ s_2=\sigma_1}} \chi^*(s_1, s_2) \chi'(s_2, s_1) \right)^* \\ &= (\chi P \chi')^*, \end{aligned} \quad (6)$$

ce qui montre que $P^\dagger = P$. Par ailleurs, P et S^z commutent puisque pour tout $|\chi\rangle$, tous σ_1 et σ_2 ,

$$\sigma_1, \sigma_2 P S^z \chi = P S^z \chi(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1 + \sigma_2) P \chi(\sigma_1, \sigma_2) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= (\sigma_1 + \sigma_2) \chi(\sigma_2, \sigma_1) = (\sigma_2 + \sigma_1) \chi(\sigma_2, \sigma_1) \\ &= S^z \chi(\sigma_2, \sigma_1) = S^z P \chi(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1, \sigma_2 S^z P \chi \end{aligned} \quad (8)$$

et par conséquent, on peut les diagonaliser dans une base commune.

b. L'action de S_z est telle que pour tous σ_1 et σ_2

$$S^z \chi_{\sigma'_1, \sigma'_2}(\sigma_1, \sigma_2) = S^z \eta_{\sigma'_1}(\sigma_1) \eta_{\sigma'_2}(\sigma_2) = (\sigma'_1 + \sigma'_2) \eta_{\sigma'_1}(\sigma_1) \eta_{\sigma'_2}(\sigma_2), \quad (9)$$

ce qui montre que

$$S^z |\chi_{\sigma'_1, \sigma'_2}\rangle = (\sigma'_1 + \sigma'_2) |\chi_{\sigma'_1, \sigma'_2}\rangle. \quad (10)$$

Les quatre fonctions $\eta_{\sigma'_1}(\sigma_1) \eta_{\sigma'_2}(\sigma_2)$ sont bien des fonctions propres de S^z puisque

$$\begin{aligned} S^z \eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2) &= \eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2) \\ S^z \eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2) &= -\eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2) \\ S^z \eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2) &= 0 \\ S^z \eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2) &= 0 \end{aligned}$$

c. Nous avons vu à la question précédente que $\eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2)$ et $\eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2)$ sont fonctions propres de S^z avec valeurs propres respectives 1 et -1 . Il est trivial de voir que si l'opérateur de permutation P donne

$$P \chi_{\sigma'_1, \sigma'_2}(\sigma_1, \sigma_2) = P \eta_{\sigma'_1}(\sigma_1) \eta_{\sigma'_2}(\sigma_2) = \eta_{\sigma'_1}(\sigma_2) \eta_{\sigma'_2}(\sigma_1),$$

alors $\eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2)$ et $\eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2)$ sont aussi des fonctions propres de P avec valeurs propres 1.

Les fonctions $\eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2)$ et $\eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2)$ par contre sont bien des fonctions propres de S^z avec la même valeur propre 0, mais pas de P . Il faut former des combinaisons linéaires antisymétrique et symétrique (par rapport à l'échange $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$) de ces fonctions pour obtenir des fonctions propres de P avec valeurs propres respectives -1 (singulet) et $+1$ (triplet).

En résumé si χ_{p, s^z} représente la fonction propre simultanée de P et de S^z avec valeurs propres respectives p et s^z , on a

$$\begin{aligned} \chi_{-,0}(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2) - \eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2)] \\ \chi_{+,1}(\sigma_1, \sigma_2) &= \eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2) \\ \chi_{+,0}(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2) + \eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2)] \\ \chi_{+,-1}(\sigma_1, \sigma_2) &= \eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2), \end{aligned}$$

où $\chi_{-,0}$ est la combinaison antisymétrique de $\eta_{1/2}(\sigma_1) \eta_{-1/2}(\sigma_2)$ et $\eta_{-1/2}(\sigma_1) \eta_{1/2}(\sigma_2)$ et $\chi_{+,0}$ celle symétrique qui fait donc partie du triplet.

3. On revient maintenant au problème de deux électrons dans un potentiel harmonique. Le principe de Pauli impose que les fonctions d'ondes de fermions soient antisymétriques. Il suit du produit $\psi(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = \varphi(x_1, x_2) \chi(\sigma_1, \sigma_2)$ que si $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ est antisymétrique alors $\varphi(x_1, x_2)$ doit être symétrique. Inversément, si $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ est symétrique alors $\varphi(x_1, x_2)$ doit être antisymétrique.

Le plus bas niveau d'énergie est celui avec les deux électrons dans le niveau E_0 , c'est-à-dire avec $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2)$, qui est symétrique. $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ doit donc

être antisymétrique, donc le seul choix qui s'offre à nous est $\chi(\sigma_1, \sigma_2) = \chi_{-,0}(\sigma_1, \sigma_2)$. Ainsi, la dégénérescence est 1, l'énergie propre est

$$E_{\text{état fond.}} = E_0 + E_0 = \hbar\omega$$

et la fonction propre

$$\psi_{\text{état fond.}}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\chi_{-,0}(\sigma_1, \sigma_2)$$

Le premier niveau excité correspond à l'état avec un électron dans le niveau E_0 et n'importe quel spin, et l'autre électron dans le niveau E_1 et n'importe quel spin aussi, ce qui donne une dégénérescence de $2 \cdot 2 = 4$. L'énergie propre est

$$E_{1\text{er état exc.}} = E_0 + E_1 = 2\hbar\omega$$

Les 4 fonctions propres sont les suivantes: on peut construire une partie spatiale antisymétrique (1 possibilité) avec un spineur symétrique (3 possibilités)

$$\begin{aligned}\psi_{1\text{er état exc.}}^{(1)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2) - \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{+,1}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \psi_{1\text{er état exc.}}^{(2)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2) - \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{+,0}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \psi_{1\text{er état exc.}}^{(3)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2) - \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{+,-1}(\sigma_1, \sigma_2)\end{aligned}$$

ou une partie spatiale symétrique (1 possibilité) avec un spineur antisymétrique (1 possibilité)

$$\psi_{1\text{er état exc.}}^{(4)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2) + \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{-,0}(\sigma_1, \sigma_2)$$

Le deuxième niveau excité peut correspondre à l'état avec un électron dans le niveau E_0 et n'importe quel spin, et l'autre électron dans le niveau E_2 et n'importe quel spin aussi (4 possibilités); ou alors à l'état avec les deux électrons dans le même niveau E_1 , mais alors avec un spin différent (1 possibilité). Dans chacun de ces cas, l'énergie propre est la même

$$E_{2\text{ème état exc.}} = E_0 + E_2 = E_1 + E_1 = 3\hbar\omega$$

et la dégénérescence est donc de $4 + 1 = 5$. Les 5 fonctions propres sont les suivantes: si les électrons sont dans les niveaux E_0 et E_2 , on peut construire une partie spatiale antisymétrique (1 possibilité) avec un spineur symétrique (3 possibilités)

$$\begin{aligned}\psi_{2\text{ème état exc.}}^{(1)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_2(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{+,1}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \psi_{2\text{ème état exc.}}^{(2)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_2(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{+,0}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \psi_{2\text{ème état exc.}}^{(3)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_2(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{+,-1}(\sigma_1, \sigma_2)\end{aligned}$$

ou une partie spatiale symétrique (1 possibilité) avec un spineur antisymétrique (1 possibilité)

$$\psi_{2\text{ème état exc.}}^{(4)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_2(x_1)\varphi_0(x_2)] \chi_{-,0}(\sigma_1, \sigma_2)$$

Et si les deux électrons sont dans le même niveau E_1 , on a

$$\psi_{2^{\text{ème}} \text{ état exc.}}^{(5)}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\chi_{-,0}(\sigma_1, \sigma_2)$$

avec une fonction spatiale symétrique et un spineur antisymétrique.

Exercice 2 *Particules bosoniques*

On suppose dans cette partie que les particules sont des bosons sans spin. La fonction d'onde du système consiste donc uniquement en une partie spatiale, qui doit être symétrique. Pour un système de deux bosons, la dégénérescence d'un niveau d'énergie E ici est donnée par la cardinalité de l'ensemble

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 | m \leq n \text{ et } E_m + E_n = E\} \quad (11)$$

et pour un système de trois bosons, elle est donnée par la cardinalité de l'ensemble

$$\{(m, n, p) \in \mathbb{N}^3 | m \leq n \leq p \text{ et } E_m + E_n + E_p = E\}$$

1. **Le plus bas niveau d'énergie** est celui avec les deux bosons dans le niveau E_0 . Ainsi, la dégénérescence est 1, l'énergie propre est

$$E_{\text{état fond.}} = E_0 + E_0 = \hbar\omega$$

et la fonction propre symétrique

$$\psi_{\text{état fond.}}(x_1, x_2) = \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)$$

Le premier niveau excité correspond à l'état avec un boson dans le niveau E_0 , et l'autre boson dans le niveau E_1 . L'énergie propre est

$$E_{1^{\text{er}} \text{ état exc.}} = E_0 + E_1 = 2\hbar\omega$$

et la dégénérescence est toujours 1. La fonction propre symétrique est

$$\psi_{1^{\text{er}} \text{ état exc.}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2) + \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2)]$$

Le deuxième niveau excité correspond soit à l'état avec un boson dans le niveau E_0 , et l'autre boson dans le niveau E_2 , soit à l'état avec les deux bosons dans le même niveau E_1 . On est dans le cas où la cardinalité de l'ensemble Eq. (11) – et donc la dégénérescence – est de 2. L'énergie propre est

$$E_{2^{\text{ème}} \text{ état exc.}} = E_0 + E_2 = E_1 + E_1 = 3\hbar\omega$$

et la fonction propre symétrique dans le cas des bosons dans les deux niveaux d'énergie différents

$$\psi_{2^{\text{ème}} \text{ état exc.}}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_2(x_1)\varphi_0(x_2)]$$

et dans le cas des bosons dans le même niveau

$$\psi_{2^{\text{ème}} \text{ état exc.}}^{(2)}(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)$$

2. On s'intéresse maintenant au cas de trois bosons. **Le plus bas niveau d'énergie** est celui avec les trois bosons dans le niveau E_0 . Ainsi, la dégénérescence est 1, l'énergie propre est

$$E_{\text{état fond.}} = E_0 + E_0 + E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

et la fonction propre symétrique

$$\psi_{\text{état fond.}}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\varphi_0(x_3)$$

Le premier niveau excité correspond à l'état avec deux bosons dans le niveau E_0 , et le troisième boson dans le niveau E_1 . L'énergie propre est

$$E_{\text{1er état exc.}} = E_0 + E_0 + E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

et la dégénérescence est toujours 1. La fonction propre symétrique est

$$\psi_{\text{1er état exc.}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\varphi_1(x_3) + \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2)\varphi_0(x_3) + \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2)\varphi_0(x_3)]$$