Exercice 1 *Théorie des perturbations dégénérées sur un système à 3 états*

On considère l'Hamiltonien suivant s'appliquant sur un spin 1:

$$\hat{H} = -D\hat{S}_z^2 + \lambda B\hat{S}_x$$

C'est un modèle qui peut être réaliste dans certains matériaux. Le premier terme représente une anisotropie, et le second un champ magnétique selon la direction x. On se propose de diagonaliser cet Hamiltonien en considérant le terme λBS_x comme une perturbation. Par la suite, on supposera que B et D sont non nuls.

1. À quelle condition l'Hamiltonien commute-t-il avec $\hat{S}_z$? Dans ce cas, donner les énergies propres et les vecteurs propres de $\hat{H}$.

2. Par la suite on considère $\lambda \neq 0$.

   Écrire la matrice de l'Hamiltonien dans la base des états propres de S_z.

   En utilisant la théorie de Rayleigh-Schrödinger des perturbations non dégénérées au deuxième ordre, calculer la correction à l'energie pour l'état $|m = 0\rangle$. Calculer la correction au vecteur propre associé, au premier ordre de la théorie des perturbations.

3. Pour calculer l'effet de la perturbation sur les deux autres états, il est nécessaire d'utiliser la théorie des perturbations dégénérées. Quelle est la matrice de l'opérateur $\hat{S}_x$ dans le sous-espace dégénéré ? En déduire que la correction au premier ordre est nulle.

4. Quelle matrice faut-il diagonaliser pour obtenir les corrections au deuxième ordre de la théorie des perturbations dégénérées ? Calculer ces corrections $E_1^{(2)}$ et $E_2^{(2)}$, et déterminer les vecteurs propres associés.

Exercice 2 *Potentiel anharmonique*

On considère l'Hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \\
\hat{H}_0 &= \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \\
\hat{H}_I &= \frac{\lambda}{4}\hat{x}^4.
\end{aligned}$$

On suppose $\lambda \ll 1$ et on va traiter l'anharmonicité $\hat{H}_I$ comme une perturbation du système harmonique (libre) $\hat{H}_0$. On introduit les opérateurs de création et d'annihilation d'une excitation (d'une particule libre) :

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}_x,$$
$$\hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}_x.$$

1. Rappeler l'expression de $\hat{H}_0$ en fonction des opérateurs $\hat{a}_x$ et $\hat{a}_x^\dagger$. En déduire les deux premiers niveaux d'énergie.
2. Déterminer l'expression de $\hat{H}_I$ en fonction des opérateurs $\hat{a}_x$ et $\hat{a}_x^\dagger$.
3. Calculer la correction d'énergie de l'état fondamental au premier ordre en λ.
4. Calculer la correction d'énergie du premier niveau excité au premier ordre en λ.