Exercice 1 *Théorie des perturbations sur un système à 2 états*

Dans cet exercice, nous allons pouvoir juger, dans le cas exactement soluble ci-dessous, de l'efficacité de la méthode des perturbations. Mais c'est bien entendu dans le cas où l'on ne peut pas résoudre l'équation de Schrödinger exactement que cette méthode sera du plus grand secours. Dans ces situations, comme par exemple lorsque l'on considère des systèmes de tailles macroscopiques pour lesquels on ne peut pas diagonaliser directement l'Hamiltonien, la méthode des perturbations peut fournir un Hamiltonien effectif plus simple et qui donne néanmoins accès à la physique du système.

Considérons un Hamiltonien de la forme:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}$$

avec

$$\hat{H}_0 = \epsilon_1 |1\rangle\langle 1| + \epsilon_2 |2\rangle\langle 2| \quad \text{et} \quad \hat{V} = V_{12}|1\rangle\langle 2| + V_{21}|2\rangle\langle 1|$$

où $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont les kets propres de $\hat{H}_0$ associés respectivement aux valeurs propres ϵ_1 et ϵ_2. On suppose que $\Delta \equiv \epsilon_2 - \epsilon_1 > 0$ et que V_{12} et V_{21} sont réels.

1. Dans la base des kets propres non perturbés, écrire explicitement la matrice associée au hamiltonien $\hat{H}$.

2. Pour des raisons d'hermiticité, trouver la relation entre les éléments de la matrice $\hat{V}$, V_{12} et V_{21}.

3. Calculer exactement le spectre du hamiltonien ainsi que ses états propres.

4. En supposant que la perturbation $\lambda|V_{12}|$ est faible devant les échelles d'énergies du problème non perturbé, développer les énergies obtenues plus haut à l'ordre 2 en λ. Reconnaître l'expression de la théorie des perturbations type Rayleigh–Schrödinger.

5. En utilisant la théorie des perturbations au premier ordre, trouver les états propres et comparer avec le résultat exact.

Exercice 2 *Puit de potentiel déformé*

On considère une particule dans un puit de potentiel carré $V(x)$ de largeur a avec des barrières infinies décrite par

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

avec $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ l'Hamiltonien non-perturbé et $\hat{H}_1 = W\cos(2\pi\hat{x}/a)$ une déformation du potentiel.

1. Rappelez les energies $E_n^{(0)}$ et états propres $u_n^{(0)}(x)$ en représentation x de $\hat{H}_0$.
2. Appliquez la thérorie des perturbations indépendante du temps et en particulier, trouvez les nouvelles énergies propres $E_n^{(1)}$ à l'ordre 1 en $\hat{H}_1$. Calculez les états propres $u_n^{(1)}(x)$ correspondants. Que remarques-t-on?
3. Calculez maintenant les énergies propres $E_n^{(2)}$ à l'ordre 2 en $\hat{H}_1$.