Exercice 1 *Révisions sur les opérateurs unitaires et hermitiens*

1. Montrer que l'opérateur d'évolution dans le temps $U_t = e^{-i\widehat{H}t/\hbar}$ est unitaire. Qu'est-ce que cela implique pour la normalisation de la fonction d'onde ?
2. Montrer que l'opérateur impulsion $\widehat{p}_x$ est hermitien. Qu'en est-il pour $\widehat{\mathbf{p}}$?
3. Est-ce que l'opérateur $\frac{d}{dx}$ est hermitien ?
4. Est-ce que l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$ est hermitien ?
5. Vérifier qu'un hamiltonien avec un potentiel réel est hermitien.

Exercice 2 *Commutateurs et matrices de Pauli*

1. Avec la définition du commutateur $[A, B] \equiv AB - BA$ montrer que :
   - $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$
   - $[AB, C] = A[BC] + [A, C]B$
   - $[\lambda A, B] = \lambda[A, B]$

   où A, B et C sont des opérateurs (matrices), et λ un nombre.
2. Soient les matrices de Pauli[1] :
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Démontrer les relations de commutation suivantes :
$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$
3. Pour chacune des matrices de Pauli, trouver les valeurs propres et les vecteurs propres normalisés $\langle v|v\rangle = (\mathbf{v}^\dagger \cdot \mathbf{v}) = 1$.
4. On appelle "valeur" d'une matrice hermitienne $M = M^\dagger$ sur un vecteur normalisé $\mathbf{v}$ la quantité suivante :
$$M\Big|_v = \langle v|M|v\rangle = (\mathbf{v}^\dagger \cdot M \cdot \mathbf{v})$$

[1] Ces matrices vont revenir de façon récurrente dans les cours de physique. Ce sont les générateurs du groupe $SU(2)$ qui décrit, entre autre, le spin des particules élémentaires ou encore la théorie électro-faible.

Calculer :

- La valeur de σ_3 sur chacun des vecteurs propres de $\sigma_3 \equiv \left\{v_i^3\right\}_{i=1,2}$
- La valeur de σ_3 sur les vecteurs propres de $\sigma_2 \equiv \left\{v_i^2\right\}_{i=1,2}$
- La valeur de σ_2 sur $\left\{v_i^2\right\}_{i=1,2}$

5. On verra plus tard dans le cours l'importance que prend l'exponentielle d'une matrice, définie par son développement de Taylor :

$$e^M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

Afin de se familiariser avec ces objets, calculer :

- $\exp\left(i\alpha\sigma_3\right)$
- $\exp\left(i\alpha\sigma_2\right)$

6. Finalement, on aimerait comprendre comment ces exponentielles agissent sur les vecteurs. Pour cela, appliquer $\exp\left(i\alpha\sigma_3\right)$ à v_1^3 et le décomposer sur $\left\{v_i^3\right\}_{i=1,2}$. Ce que nous entendons par là, c'est de trouver les coefficients c_1 et c_2 dans :

$$\exp\left(i\alpha\sigma_3\right) \cdot v_1^3 = c_1 v_1^3 + c_2 v_2^3$$

Pour y parvenir, on peut utiliser l'orthonormalité des vecteurs propres. Faire de même avec :

- $\exp\left(i\alpha\sigma_3\right)$ appliqué à v_1^2 et décomposer le résultat sur $\left\{v_i^2\right\}_{i=1,2}$
- $\exp\left(i\alpha\sigma_2\right)$ appliqué à v_1^3 et décomposer le résultat sur $\left\{v_i^3\right\}_{i=1,2}$
- $\exp\left(i\alpha\sigma_2\right)$ appliqué à v_1^2 et décomposer le résultat sur $\left\{v_i^2\right\}_{i=1,2}$

Exercice 3 *Systèmes ferromagnétiques*

1. Nous considérons un système de deux spins 1/2, avec un hamiltonien $H_{12} = -J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ (J est un réel positif). Quels sont les niveaux d'énergie et les états propres de ce hamiltonien (cf. série 1)?

2. On considère désormais un système de N spins 1/2 S_i ($i = 1, \ldots, N$) décrit par le hamiltonien

$$H_N = -J(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + ... + \mathbf{S}_N \cdot \mathbf{S}_1) = -J \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}, \quad J > 0.$$

où $\mathbf{S}_{N+1} \equiv \mathbf{S}_1$.[2] On désigne par $\{|m_1 m_2 ... m_N\rangle\}$ une base de l'espace de Hilbert total définie par

$$S_i^z |m_1, m_2, ..., m_N\rangle = \hbar m_i |m_1, m_2, ..., m_N\rangle.$$

[2] Ce type de hamiltonien peut par exemple décrire les interactions entre des atomes de fer.

(a) Écrire le hamiltonien H_N à l'aide des opérateurs S_i^z, S_i^+, S_i^- $(i = 1, ..., N)$.

(b) Démontrer que l'état $|F\rangle = |m_1 = 1/2, m_2 = 1/2, ..., m_N = 1/2\rangle \equiv |\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\rangle$ est un état propre de H_N, et calculer son énergie.

(c) En appliquant le résultat de la question 1 aux opérateurs $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}$ $(i = 1, ..., N)$, démontrer que $|F\rangle$ est un état du fondamental.

(d) Démontrer que $S_{\text{tot}}^- = \sum_{i=1}^N S_i^-$ commute avec H_N.

(e) En déduire que le fondamental est dégénéré, et déterminer sa dégénérescence (minimale). Donner la forme explicite de deux autres états fondamentaux.