Exercice 1 *Caractères d'une représentation*

Considérer le groupe de transformations C_{3v}

1. Dériver la table des caractères des représentations irréductibles Γ_1, Γ_2, Γ_3.

   Suggestion: Nous pouvons calculer la table des caractères à partir des matrices des représentations irréductibles. Nous pouvons aussi utiliser la relation

   $$n_\mu n_\nu \chi^{(i)}(C_\mu)\chi^{(i)}(C_\nu) = l_i \sum_{\lambda=1}^{N_C} n_{\mu\nu\lambda} n_\lambda \chi^{(i)}(C_\lambda)$$

2. Considérer l'espace des fonctions avec vecteurs de base $\Psi_1(\mathbf{r}) = x^2$, $\Psi_2(\mathbf{r}) = y^2$, $\Psi_3(\mathbf{r}) = 2xy$. Considérer les transformations données par

   $$\Psi'(\mathbf{r}) = \Gamma(u)\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(R^{-1}(u)\mathbf{r}), \ \ \forall u \in C_{3v}.$$

   Ces fonctions génèrent une représentation Γ de dimension 3. Effectuer, à l'aide des caractères, la décomposition en représentations irréductibles de cette représentation. Cela veut dire, trouver les coefficients b_i dans la somme directe

   $$\Gamma = b_1\Gamma_1 \oplus b_2\Gamma_2 \oplus b_3\Gamma_3$$

3. Considérer l'espace généré par les fonctions x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, xz^2, y^2z, yz^2, xyz. Suivant la loi de transformation utilisée en 2, ces fonctions génèrent une représentation de dimension 10. Trouver les caractères et sa décomposition en représentations irréductibles.