Exercice 1 *Représentations irréductibles - groupes abéliens*

On considère un groupe fini abélien H d'ordre h.

1. Montrer que toutes les représentations irréductibles D_j ont dimension $n_j = 1$. De cette manière, une représentation irréductible D_j associe à chaque élément x du groupe un nombre $D_j(x) \in \mathbb{C}$. Pour un groupe fini, une représentation est toujours équivalente à une représentation unitaire. Pour les représentations irréductibles unitaires, quelles restrictions on a sur les $D_j(x)$?

2. Montrer que le nombre N_D de représentations irréductibles non-équivalentes est égal à h, l'ordre du groupe.

3. Ecrire les tables de multiplication des seuls deux possibles groupes abéliens d'ordre $h = 4$. Il s'agit ici d'indiquer les éléments du groupe $H = \{e, a, b, c\}$, et de remplir la table des multiplication de façon à que tout soit consistent (c'est un peu comme pour le sudoku, mais il y a deux solutions distinctes possibles).

4. Considérer le grand théorème d'orthogonalité vu en cours. Pour deux représentations irréductibles D_a et D_b unitaires d'un groupe fini G d'ordre N, on a

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g)]^*_{jk} [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km} \,. \tag{1}$$

   Déduire, à partir de cette relation, une relation d'orthogonalité entre les caractères $\chi_a(g)$ et $\chi_b(g)$.

5. En utilisant la relation d'orthogonalité précédamment obtenue, déduire la table des caractères des deux groupes d'ordre 4 introduits au point (3).