Exercice 1 *Représentations irréductibles - groupes abéliens*

1. Supposons par absurde qu'il y ait une représentation irréductible D_i de dimension $d \neq 1$. Nous savons qu'il y a au moins un élément du groupe $y \in H$ qui est représenté par une matrice $D(y)$ non diagonale. D'autre part, le groupe H est abélien et donc on a la propriété:

$$D(x)D(y) = D(xy) = D(yx) = D(y)D(x), \forall x \in H$$

et pour le Lemme de Schur, cela implique que $D(y) = \lambda \mathbf{1}$ en contradiction avec l'hypothèse. Considérons une représentation unitaire irréductible $D(x)$ $(x \in H)$ dans l'espace vectoriel à une dimension $\mathbb{C}$. Donc on a $D(x)v = \alpha_x^{(i)} v, \forall v \in \mathbb{C}$. Une représentation unitaire doit conserver le produit scalaire entre vecteurs, c'est à dire

$$\langle D(x)v | D(x)v \rangle = \alpha_x^{(i)*} u \alpha_x^{(i)} v = |\alpha_x^{(i)}|^2 uv = \langle u|v \rangle,$$

$\forall u,\, v \in V$. Alors on a la condition $|\alpha_x^{(i)}|^2 = 1$: $\alpha_x^{(i)}$ doit appartenir au cercle unitaire dans le plan complexe, c'est à dire $\alpha_x^{(i)} = e^{i\phi_x^{(i)}}$.

2. On peut utiliser le théorème de Burnside. Si N_D est le nombre de représentations irréductibles non-équivalentes et n_i est la dimension de la représentation irréductible D_i, on a

$$\sum_{i=1}^{N_D} n_i^2 = h.$$

Pour un groupe abélien on a vu au point (1) que $n_i = 1, \forall i$ et donc $N_D = h$.

3. La table de multiplication du groupe abélien d'ordre 4 non-cyclique est donnée par

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Pour le groupe d'ordre quatre cyclique, on a la table de multiplication

	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

et on a $a^4 = e$.

4. Selon la définition, un caractère $\chi_a(g)$ est égale à la trace de la matrice de représentation: $\chi_a(g) = [D_a(g)]_{ii}$. Dans le cas du groupe abélien, ces matrices sont juste des nombres complexes, donc $\chi_a(g) = D_a(g)$, $\forall g \in G$. En utilisant la relation

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g)]^*_{jk} [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km}, \tag{1}$$

on a

$$\sum_{g \in G} \chi_a(g)^* \chi_b(g) = N \delta_{ab}, \tag{2}$$

comme $n_a = 1$.

5. Selon le point (1) toutes les représentations irréductibles de ce groupe doivent être de dimension 1 et, selon le point (2), on a 4 représentations irréductibles non-équivalentes. Une de ces représentations est la représentation identique $D_1(x) = 1, \forall x$. De plus, on doit avoir $D_i(e) = 1$ pour chaque représentation.

   La table de multiplication pour le groupe non-cyclique impose $a^2 = b^2 = c^2 = e$, donc a, b, c peuvent être représentés seulement par ± 1. Si $D_2(a) = 1$, alors par la table de multiplication du groupe nous avons $D_2(b) = D_2(c) = -1$. Si $D_i(a) = -1$, alors on a deux représentations possibles, pour lesquelles $D_i(b) = \pm 1$ et simultanément $D_i(c) = \mp 1$. Les quatre représentations sont donc

	e	a	b	c
D_1	1	1	1	1
D_2	1	1	-1	-1
D_3	1	-1	1	-1
D_4	1	-1	-1	1

   Pour le groupe d'ordre quatre cyclique, on a $a^4 = e$. Si on écrit $D_k(a) = A_k$ alors A_k doit être une des quatre racines $4^{\text{èmes}}$ de l'unité, $A_k = \omega^{k-1}$, $k = 1, ..., 4$, avec $\omega = e^{i\pi/2}$. Finalement on obtient les 4 représentations

	e	a	a^2	a^3
D_1	1	1	1	1
D_2	1	$e^{i(\pi/2)}$	$e^{i\pi}$	$e^{i(3\pi/2)}$
D_3	1	$e^{i\pi}$	$e^{i(2\pi)}$	$e^{i(3\pi)}$
D_4	1	$e^{i(3\pi/2)}$	$e^{i(3\pi)}$	$e^{i(9\pi/2)}$