Exercice 1 *Convexité de l'ensemble des opérateurs densité*

On définit l'espace des matrices densité par les trois conditions suivantes:

1. La matrice densité est hermitique: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$
2. La trace est égale à 1: $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$
3. La matrice densité est définie positive ou nulle : $\langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle \geq 0, \quad \forall\Psi$

Prouver que les matrices $\hat{\rho}$ satisfaisant ces trois conditions forment une région convexe dans l'espace des opérateurs.

Exercice 2 *Opérateur densité, trace partielle, information et mesure*

Alice et Bob se partagent l'état

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

1. Quelle est la matrice densité $\hat{\rho}$ du système à deux qu-bits?
2. Vérifier qu'il s'agit d'un état pur en calculant $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$.

On note $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A\,\hat{\rho}$ la matrice densité obtenue par trace partielle sur le qu-bit d'Alice. Cette matrice est un opérateur sur l'espace de Hilbert du second qu-bit (celui de Bob), et reflète l'information dont dispose Bob.

3. Calculer $\hat{\rho}_B$ et relier ce résultat à la probabilité qu'a Bob d'obtenir pour résultat 0 ou 1 lorsqu'il mesure son qu-bit dans la base computationnelle (on notera $\hat{O}$ l'observable correspondante). Vérifier également que l'on a bien $\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(\mathbb{1}\otimes\hat{O})] = \text{Tr}(\hat{\rho}_B\hat{O})$.
4. La matrice ρ_B décrit-elle un état pur du second qu-bit? Justifier par le calcul de $\text{Tr}(\hat{\rho}_B^2)$. Qu'en serait-il si l'état à deux qu-bits $|\psi\rangle$ était séparable sous la forme $|\psi_A\rangle\otimes|\psi_B\rangle$? On dit parfois que les mélanges statistiques des états d'un système sont le fruit de l'intrication de ce système avec son environnement; quel sens donner à cette formulation à la lumière des résultats de cette question?

On admet que lorsque la mesure d'une observable $\hat{M}$ sur le système donne le résultat m, alors la matrice densité ($\hat{\rho}$ avant mesure) devient

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_m\hat{\rho}\hat{P}_m^\dagger}{\text{Tr}(\hat{P}_m^\dagger\hat{P}_m\hat{\rho})}, \tag{2}$$

où $\hat{P}_m$ est le projecteur sur le sous-espace propre relatif à m.

5. Quel est l'état à deux qu-bits $|\psi'\rangle$ obtenu lorsqu'Alice mesure son qu-bit dans la base computationnelle et trouve 0 ? Comparer $|\psi'\rangle\langle\psi'|$ et $\hat{\rho}'$.

6. Lorsqu'Alice a effectué une mesure de son qu-bit sur l'état $|\psi\rangle$ et a trouvé 0, quelle est la matrice densité $\hat{\rho}'_B$? Commenter.

Exercice 3 *Sphère de Bloch pour états purs ou mixtes d'un système à deux niveaux*

1. Montrer que tout état pur $|\psi\rangle$ d'un système à deux niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ peut s'écrire

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \in [0, 2\pi[, \tag{3}$$

et en conclure que la sphère unité en trois dimensions permet de représenter l'état pur d'un système à deux niveaux (qu-bit, spin 1/2, photon,...). On appelle sphère de Bloch cette sphère unité et la représentation associée.

2. Dans le cas d'un spin 1/2, par convention, le pôle nord $|0\rangle$ (resp. le pôle sud $|1\rangle$) avec l'état propre de $\hat{S}_z$ de valeur propre $+\hbar/2$ (resp. $-\hbar/2$). Montrer que l'état $|\psi\rangle$ de l'Eq. (3) est état propre de $\hat{S}_{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{S}}.\boldsymbol{n}$, où $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire dont la direction est paramétrée par θ et ϕ en coordonnées sphériques. Dans une image classique (non quantique) du spin, $\boldsymbol{n}$ désignerait donc la direction dans laquelle pointe ce spin.

La représentation de Bloch peut être généralisée aux états mixtes.

3. Montrer que toute matrice densité $\hat{\rho}$ du système à deux niveaux peut s'écrire

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}.\boldsymbol{r}), \tag{4}$$

où $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ et $\boldsymbol{r}$ est un vecteur (réel) de l'espace tridimensionnel, tel que $||\boldsymbol{r}|| \leq 1$. On appelle *vecteur de Bloch* ce vecteur $\boldsymbol{r}$.

4. Quel est le vecteur de Bloch représentant l'état $\hat{\rho} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$?

5. Montrer que l'état est pur si et seulement si $||\boldsymbol{r}|| = 1$.

6. Montrer que cette généralisation est cohérente avec la représentation des questions 1 et 2 lorsque $\hat{\rho}$ désigne un état pur.