**Exercice 1** *Convexité de l'ensemble des opérateurs densité*

Pour montrer que l'espace des matrices densité est convexe, il suffit de montrer que tout segment tiré entre deux points quelconques, appartient à l'espace. Soient $A, B$ deux matrices densité et $\lambda \in [0,1]$. Soit $\rho$ un point du segment [AB] tel que $\rho = \lambda A + (1-\lambda)B$. Montrons que $\rho$ est aussi une matrice densité.

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ donc la propriété 1. est vérifiée
2. $\mathrm{Tr}[\lambda A + (1-\lambda)B] = \lambda + (1-\lambda) = 1$
3. $\langle \Psi|\lambda A + (1-\lambda)B|\Psi\rangle = \lambda\langle\Psi|A|\Psi\rangle + (1-\lambda)\langle\Psi|B|\Psi\rangle \geq 0$ car $A, B$ sont des matrices densité et $\lambda \in [0,1]$

**Exercice 2** *Opérateur densité, trace partielle, information et mesure*

1. L'opérateur densité du système est
$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01| - \frac{1}{2}|01\rangle\langle 10| - \frac{1}{2}|10\rangle\langle 01| + \frac{1}{2}|10\rangle\langle 10|, \tag{1}$$
et sa matrice représentative dans la base computationnelle est
$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
On vérifie bien que la trace de la matrice (de l'opérateur) vaut un.

2. On a $\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho}$, ce que l'on vérifierait aussi en élevant les expressions (1) et (2) au carré. Ceci implique $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ et caractérise un état pur (ce que l'on savait par construction).

3. La trace partielle sur le premier qu-bit donne
$$\hat{\rho}_B = \sum_{xyy'} |y\rangle\langle xy|\hat{\rho}|xy'\rangle\langle y'| = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \tag{3}$$
$$\rho_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$
Remarque: pour effectuer la trace partielle sur le second qu-bit en représentation matricielle, dans la base ordonnée selon $\{|0_A 0_B\rangle, |0_A 1_B\rangle, |1_A 0_B\rangle, |1_A 1_B\rangle\}$, on peut s'inspirer du schéma suivant:
$$\rho = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \diamondsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \clubsuit & \clubsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ \clubsuit & \clubsuit & \heartsuit & \heartsuit \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_B} \rho_A = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \spadesuit \\ \clubsuit & \heartsuit \end{pmatrix}, \tag{5}$$

où les symboles représentent les coefficients correspondant aux actions

$$
\begin{array}{ll}
\diamondsuit : |0_A\rangle \mapsto |0_A\rangle & \qquad \spadesuit : |1_A\rangle \mapsto |0_A\rangle \\
\clubsuit : |0_A\rangle \mapsto |1_A\rangle & \qquad \heartsuit : |1_A\rangle \mapsto |1_A\rangle,
\end{array}
$$

et les cercles en pointillés représentent les coefficients à sommer dans l'opération de trace partielle (il s'agit des éléments diagonaux dans chacune des sous-matrices définie par un symbole de jeu de cartes). Pareillement, pour effectuer l'opération de trace partielle sur le premier qu-bit, on aura en tête le schéma suivant:

$$
\rho = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \spadesuit & \diamondsuit & \spadesuit \\ \clubsuit & \heartsuit & \clubsuit & \heartsuit \\ \diamondsuit & \spadesuit & \diamondsuit & \spadesuit \\ \clubsuit & \heartsuit & \clubsuit & \heartsuit \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_A} \rho_B = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \spadesuit \\ \clubsuit & \heartsuit \end{pmatrix}, \tag{6}
$$

où les symboles représentent les coefficients correspondant aux actions

$$
\begin{array}{ll}
\diamondsuit : |0_B\rangle \mapsto |0_B\rangle & \qquad \spadesuit : |1_B\rangle \mapsto |0_B\rangle \\
\clubsuit : |0_B\rangle \mapsto |1_B\rangle & \qquad \heartsuit : |1_B\rangle \mapsto |1_B\rangle.
\end{array}
$$

La forme de $\rho_B$ à l'Eq. (4) représente un mélange statistique de $|0\rangle$ et de $|1\rangle$, avec des poids 1/2 chacun, en accord avec la probabilité 1/2, bien connue, qu'a Bob de trouver 0 (resp. 1) lorsqu'il effectue une mesure de son qu-bit dans l'état singulet. L'observable $\hat{O}$ a pour valeurs propres 0 et 1, et pour vecteurs propres correspondants $|0\rangle$ et $|1\rangle$; elle s'écrit donc $\hat{O} = |1\rangle\langle 1|$, avec la représentation matricielle

$$
O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}
$$

On cherche ici à vérifier que $\mathrm{Tr}[\hat{\rho}(\mathbb{1} \otimes \hat{O})]$ et $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_B \hat{O})$ coincident, et valent bien $\langle \hat{O} \rangle = 1/2$ (la moyenne de 0 et 1, puisque chacun de ces résultats de mesure à une probabilité 1/2); ceci afin de vérifier que les valeurs moyennes des observables relatives au second qu-bit s'obtiennent aussi bien à l'aide de la matrice densité totale $\hat{\rho}$ que de la matrice densité réduite $\hat{\rho}_B$. Comme précédemment, on peut travailler avec la représentation "ket-bra" des opérateurs, ou avec leurs représentations matricielles. En adoptant la notation matricielle, on trouve bien

$$
\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \tag{8}
$$

et

$$
\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \tag{9}
$$

4. La matrice densité $\hat{\rho}_B$ décrit un état mixte: $\hat{\rho}_B^2 = \mathbb{1}/4$, donc $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_B^2) = 1/2 < 1$. Du point de vue de Bob, le second qu-bit apparaît donc être dans un état de mélange statistique de $|0\rangle$ et de $|1\rangle$, alors même que l'état du système total à deux qu-bits (décrit par le vecteur $|\psi\rangle$ ou la matrice densité $\hat{\rho}$) est un état pur. Ceci découle du fait que Bob n'a accès qu'à l'information relative à son propre qu-bit, qu'il ne dispose

pas de l'information complète sur le système (l'état du système total à deux qu-bits), et que l'état à deux qu-bits est intriqué. En effet, si $|\psi\rangle$ est séparable sous la forme $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, alors la matrice densité devient

$$\hat{\rho} = |\psi_A\psi_B\rangle\langle\psi_A\psi_B| = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2, \tag{10}$$

avec

$$\hat{\rho}_1 = |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \tag{11}$$
$$\hat{\rho}_2 = |\psi_B\rangle\langle\psi_B|, \tag{12}$$

et la matrice densité du second qu-bit, à savoir

$$\hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2) = (\mathrm{Tr}\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_2 = |\psi_B\rangle\langle\psi_B|, \tag{13}$$

est bien celle d'un état pur. On a ainsi illustré sur la base d'un exemple le fait que, si le système total est dans un état pur, un sous système apparaît dans un état mixte si et seulement s'il est intriqué avec le reste du système. Dans le cadre de la physique statistique, ce résultat nous autorise à formuler l'hypothèse que l'état de l'univers pourrait être un état pur (une fonction d'onde $|\psi\rangle$), et que la physique statistique d'un système donné pourrait être le reflet de l'intrication du sytème avec son environnement (bain thermique, reste de l'univers, ...).

5. Lorsqu'Alice effectue une mesure de son qu-bit dans l'état $|\psi\rangle$ et trouve 0, l'état à deux qu-bits devient

$$|\psi'\rangle = |01\rangle. \tag{14}$$

Le projecteur à deux qu-bits correspondant à ce résultat est

$$\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} = \hat{P}_0^\dagger, \tag{15}$$

d'où

$$\hat{P}_0\hat{\rho} = \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01| - \frac{1}{2}|01\rangle\langle 10| \tag{16}$$
$$\hat{P}_0\hat{\rho}\hat{P}_0^\dagger = \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01| \tag{17}$$
$$\mathrm{Tr}(\hat{P}_0^\dagger\hat{P}_0\hat{\rho}) = \mathrm{Tr}(\hat{P}_0\hat{\rho}\hat{P}_0^\dagger) = \frac{1}{2}, \tag{18}$$

et le nouvel opérateur densité est

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_0\hat{\rho}\hat{P}_0^\dagger}{\mathrm{Tr}(\hat{P}_0^\dagger\hat{P}_0\hat{\rho})} = |01\rangle\langle 01| = |\psi'\rangle\langle\psi'|, \tag{19}$$

comme attendu.

6. On se trouve ici dans le cas de figure (séparable, non intriqué) des Eqs. (10) à (13) avec $|\psi'_A\rangle = |0\rangle$ et $|\psi'_B\rangle = |1\rangle$, d'où $\hat{\rho}'_B = |1\rangle\langle 1|$. On retrouve ce résultat par un autre cheminement, en effectuant une trace partielle sur $\hat{\rho}'$:

$$\hat{\rho}'_B = \mathrm{Tr}_A(\hat{\rho}') = \sum_{xyy'} |y\rangle\langle xy|\hat{\rho}'|xy'\rangle\langle y'| = |1\rangle\langle 1|, \tag{20}$$

qui reflète bien la probabilité 1 qu'a Bob de trouver 1 lors d'une mesure de son qu-bit (ce qu'on attend puisqu'Alice a mesuré 0 et que les résultats de mesure doivent être parfaitement anticorrélés).

**Exercice 3** *Sphère de Bloch pour états purs ou mixtes d'un système à deux niveaux*

1. Sans perte de généralité, on peut écrire tout état à deux niveaux (considéré seul) sous la forme

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b\,e^{i\phi}|1\rangle, \tag{21}$$

avec $a$ et $b$ des réels positifs tels que $a^2+b^2 = 1$ et $\phi \in [0, 2\pi[$, puisque la phase globale n'a pas d'importance physique. On peut donc introduire un paramètre $\theta \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos\frac{\theta}{2}$ et $b = \sin\frac{\theta}{2}$, d'où le résultat. Les angles $\theta$ et $\phi$ peuvent être interprétés comme les angles polaire et azimuthal des coordonnées sphériques, qui offrent une paramétrisation de la sphère unité en trois dimensions. On se convainc donc immédiatement qu'à un point de cette sphère unité (sphère de Bloch) correspond un et un seul état du système à deux niveaux. En particulier, le pôle nord de la sphère de Bloch correspond à l'état $|0\rangle$, et le pôle sud à $|1\rangle$.

2. Par définition, la projection de spin dans la direction

$$\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{22}$$

est

$$\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{n}} = \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma}_x \sin\theta\cos\phi + \hat{\sigma}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{\sigma}_z\cos\theta) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta, \end{pmatrix} \tag{23}$$

où la représentation matricielle est celle dans la base $\{|+_z\rangle, |-_z\rangle\}$. L'opérateur (23) a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - (\hbar/2)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ et donc bien pour valeurs propres $\pm\hbar/2$. Les vecteurs propres correspondant s'écrivent

$$|\pm_{\boldsymbol{n}}\rangle = \alpha_\pm|+_z\rangle + \beta_\pm|-_z\rangle, \tag{24}$$

avec en particulier

$$0 = \alpha_+(\cos\theta - 1) + \beta_+ e^{-i\phi}\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\alpha_+\sin\frac{\theta}{2} + \beta_+ e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\right), \tag{25}$$

d'où l'on déduit

$$|+_{\boldsymbol{n}}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+_z\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|-_z\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle = |\psi\rangle. \tag{26}$$

3. Toute matrice densité du système à deux niveaux appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices hermitiques $2\times 2$. Ces dernières sont de la forme

$$H = \begin{pmatrix} a & b-ic \\ b+ic & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

ce qui montre que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel de dimension 4. Les matrices $\mathbb{1}$, $\sigma_x$, $\sigma_y$ et $\sigma_z$ sont hermitiques et linéairement indépendantes; elles forment donc une base de cet espace vectoriel. Toute matrice $H$ se met donc sous la forme

$$H = a'\mathbb{1} + b'\sigma_x + c'\sigma_y + d'\sigma_z \quad \left(a' = \frac{a+d}{2}, b' = b, c' = c, d' = \frac{a-d}{2}\right), \tag{28}$$

c'est-à-dire

$$H = a'\mathbb{1} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}.\boldsymbol{r}', \quad \boldsymbol{r}' = (b', c', d') \in \mathbb{R}^3. \tag{29}$$

Dans le cas des matrices densité, on a de plus les contraintes

$$1 = \mathrm{Tr}\rho = 2a' \tag{30}$$

$$1 \geq \mathrm{Tr}(\rho^2) = 2\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\right) = \frac{1}{2} + 2||\boldsymbol{r}'||^2. \tag{31}$$

En introduisant $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{r}'$, cette dernière contrainte s'écrit $||\boldsymbol{r}|| \leq 1$. L'ensemble des matrices densité $2 \times 2$ est donc

$$\left\{\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}.\boldsymbol{r}) \middle| \boldsymbol{r} \in \mathcal{B}\right\}, \tag{32}$$

où $\mathcal{B}$ est la boule unité de $\mathbb{R}^3$.

4. L'état mixte

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}\mathbb{1} \tag{33}$$

est représenté par le vecteur de Bloch $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, c'est-à-dire l'origine dans la *boule de Bloch*.

5. Les calculs de l'expression (31) montrent que

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = \frac{1 + ||\boldsymbol{r}||^2}{2}, \tag{34}$$

et donc que $\hat{\rho}$ décrit un état pur ($\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$) si et seulement si $||\boldsymbol{r}|| = 1$. Remarque: on retrouve ce résultat à partir de l'expression

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + r_x\hat{\sigma}_x + r_y\hat{\sigma}_y + r_z\hat{\sigma}_z), \tag{35}$$

puisque $\mathbb{1} = \hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2$ et que donc

$$\hat{\rho}^2 = \frac{1}{4}(1 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\mathbb{1} + r_x\hat{\sigma}_x + r_y\hat{\sigma}_y + r_z\hat{\sigma}_z \tag{36}$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = \frac{1}{2}(1 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) = \frac{1 + ||\boldsymbol{r}||^2}{2} \tag{37}$$

6. Partant de l'écriture d'un état par $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ quelconque, représenté sur la sphère de Bloch par le vecteur (ou point) $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, la matrice densité correspondante est

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}|0\rangle\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle\langle 1| + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|1\rangle\langle 0| + \sin^2\frac{\theta}{2}|1\rangle\langle 1| \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & \sin\theta\,(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta\,(\cos\phi + i\sin\phi) & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}.\boldsymbol{n}).\end{aligned} \tag{38}$$

La construction du vecteur $\boldsymbol{r}$ à la question 3 implique

$$r_x = 2b' = 2b = \sin\theta\cos\phi = n_x \tag{39}$$

$$r_y = 2c' = 2c = \sin\theta\sin\phi = n_y \tag{40}$$

$$r_z = 2d' = a - d = \cos\theta = n_z \tag{41}$$

donc $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$ et les représentations des questions 1 et 3 coincident pour les états purs.