Exercice 1 *Etats à plusieurs qu-bits*

1. Utiliser la porte logique CNOT pour construire un élément SWAP qui échange les valeurs de deux qu-bits
$$U_{\text{SWAP}}|x,y\rangle = |y,x\rangle.$$

2. On se demande si la porte logique CNOT pourrait être utilisée pour cloner un état quantique. Montrer d'abord qu'elle peut copier les états de la base computationnelle $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:
$$|0\rangle \to |00\rangle$$
$$|1\rangle \to |11\rangle.$$
Montrer ensuite que cette opération de copie ne fonctionne pas si appliquée à l'état arbitraire
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Exercice 2 *Oscillations de Rabi*

Si l'on considère le spin comme un système à 2 niveaux alors il peut être utilisé pour coder des qu-bits $|\uparrow\rangle \to |0\rangle\,,\ |\downarrow\rangle \to |1\rangle$. L'avantage est que l'on peut orienter un spin en le soumettant à un champ magnétique afin de préparer n'importe quel état. On peut représenter un état de spin comme un vecteur pointant sur une sphère de Bloch unité. Tout état peut alors s'écrire sous la forme $|\psi\rangle = \cos(\theta)\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ en coordonnées sphériques et où les pôles correspondent aux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

L'énergie d'un spin soumis à un champ magnétique $\mathbf{B}$ est donnée par
$$E = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$
où $\boldsymbol{\mu} = (\gamma/\hbar)\mathbf{S}$ est le moment magnétique exprimé en fonction du spin $\mathbf{S}$, et γ est une constante.

1. Ecrire l'opérateur Hamiltonien en présence d'un champ magnétique de la forme
$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{z} + B_1(\mathbf{x}\cos\omega t - \mathbf{y}\sin\omega t).$$
On défini les fréquences de Larmor $\hbar\omega_0 = \gamma B_0$ et de Rabi $\hbar\omega_1 = \gamma B_1$.

2. Considérer l'état arbitraire dépendant du temps
$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle,$$
où les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont les états propres de la composante S_z du spin. Ecrire les équations différentielles qui régissent la dépendance du temps de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Effectuer après les changements de variables $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)\mathrm{e}^{i\omega_0 t/2}$ et $\beta(t) = \tilde{\beta}(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/2}$.

3. Montrer qu'on peut réduire le problème à la solution d'une équation différentielle de deuxième ordre pour $\tilde{\alpha}(t)$. Ecrire la solution générale de cette équation.

4. Calculer l'évolution de l'état dans le cas avec conditions initiales $\tilde{\alpha}(0) = 1$ et $\tilde{\beta}(0) = 0$. Etudier la probabilité de trouver le spin dans l'état $|1\rangle$ à l'instant t. Comment varie cette probabilité en fonction de ω