Exercice 1 *Etats à Plusieurs Qu-bits*

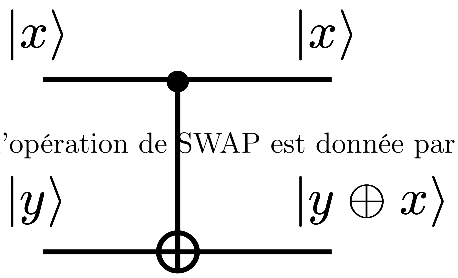
1. Le CNOT admet en entrée $|x, y\rangle$ et rend en sortie $|x, y \oplus x\rangle$, où $\oplus$ est la somme module 2. Nous remarquons tout d'abord que $y \oplus (y \oplus x) = x$. Quels peuvent être les états en entrée d'un CNOT, pour obtenir à la sortie $|y, x\rangle$? Si en entrée nous avions $|y, y \oplus x\rangle$, alors nous aurions

$$U_{\text{CNOT}}|y, y \oplus x\rangle = |y, y \oplus (y \oplus x)\rangle = |y, x\rangle.$$

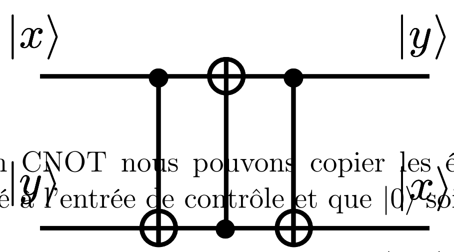
Nous devrions maintenant obtenir $|y, y \oplus x\rangle$ d'une opération CNOT. L'idée est de partir de l'état $|x, y \oplus x\rangle$ et d'appliquer un CNOT (avec les deux entrées inversées). Dans ce cas, nous aurions

$$U'_{\text{CNOT}}|x, y \oplus x\rangle = |x \oplus (y \oplus x), y \oplus x\rangle = |y, y \oplus x\rangle.$$

Pour finir, nous remarquons que l'état $|x, y \oplus x\rangle$ est la sortie d'un CNOT avec en entrée $|x, y\rangle$.
Donc il faut appliquer trois CNOT, dont celui du milieu est inversé. Si on indique le CNOT par le symbole suivant:



alors l'opération de SWAP est donnée par la porte logique suivante:



2. Avec un CNOT nous pouvons copier les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Il suffit que l'état soit appliqué à l'entrée de contrôle et que $|0\rangle$ soit appliqué à l'entrée principale:

$$U_{\text{CNOT}}|x, 0\rangle = |x, x\rangle.$$

Donc nous savons copier $|0\rangle \to |00\rangle$ et $|1\rangle \to |11\rangle$. Considérons maintenant l'état

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

L'entrée du CNOT sera alors

$$|\phi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle.$$

Par linéarité, à la sortie nous aurons

$$U_{\text{CNOT}}|\phi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle.$$

Cet état est un état intriqué et ne correspond pas à l'état non intriqué $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ qu'il aurait fallu obtenir pour copier avec succès l'état $|\psi\rangle$.
De manière plus générale, l'impossibilité de copier un état quantique arbitraire est garantie par le *no-cloning theorem*.

Exercice 2 *Oscillations de Rabi*

1. L'Hamiltonien s'écrit:

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{\gamma}{\hbar}\left(B_x S_x + B_y S_y + B_z S_z\right) \\
&= -\frac{\gamma}{\hbar}\left[B_x \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B_y \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + B_z \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \\
&= -\frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En utilisant $B_x = B_1 \cos\omega t$, $B_y = -B_1 \sin\omega t$ et $B_z = B_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix} B_0 & B_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) \\ B_1(\cos\omega t - i\sin\omega t) & -B_0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{i\omega t} \\ B_1 e^{-i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & \hbar\omega_1 e^{i\omega t} \\ \hbar\omega_1 e^{-i\omega t} & -\hbar\omega_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Nous utilisons l'équation de Schrödinger:

$$\begin{gathered}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t)|0\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\beta(t)|1\rangle = H(\alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle).
\end{gathered}$$

L'évolution temporelle des coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ s'obtient en introduisant l'expression matricielle de H dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, obtenue à la question précédente:

$$i\hbar\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\beta(t) \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Il en découle le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}\alpha(t) = -\dfrac{\omega_0}{2}\alpha(t) - \dfrac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}\beta(t) \\ i\dfrac{\partial}{\partial t}\beta(t) = -\dfrac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}\alpha(t) + \dfrac{\omega_0}{2}\beta(t) \end{cases}.$$

Après le changement de variables, la première équation devient

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(t)\right)e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} - \tilde{\alpha}(t)\frac{\omega_0}{2}e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} &= -\frac{\omega_0}{2}\tilde{\alpha}(t)e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} - \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}\tilde{\beta}(t) \\ i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(t) &= -\frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}e^{-i\omega_0 t}\tilde{\beta}(t), \end{aligned}$$

et la deuxième devient

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\beta}(t)\right)e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} + \tilde{\beta}(t)\frac{\omega_0}{2}e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} &= \frac{\omega_0}{2}\tilde{\beta}(t)e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} - \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}\tilde{\alpha}(t)e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} \\ i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\beta}(t) &= -\frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}e^{i\omega_0 t}\tilde{\alpha}(t). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le système d'équations:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(t) = -\frac{\omega_1}{2}e^{i(\omega-\omega_0)t}\tilde{\beta}(t) \tag{1}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\beta}(t) = -\frac{\omega_1}{2}e^{-i(\omega-\omega_0)t}\tilde{\alpha}(t). \tag{2}$$

3. D'après l'équation (1), nous avons:

$$\tilde{\beta}(t) = -\frac{2i}{\omega_1}e^{-i(\omega-\omega_0)t}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(t).$$

En l'insérant cette expression dans l'équation (2), il s'ensuit

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_1}{2}e^{-i(\omega-\omega_0)t}\tilde{\alpha}(t) &= i\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{2i}{\omega_1}e^{-i(\omega-\omega_0)t}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(t)\right) \\ &= \frac{2}{\omega_1}\left[e^{-i(\omega-\omega_0)t}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\alpha}(t) - i(\omega-\omega_0)e^{-i(\omega-\omega_0)t}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(t)\right]. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons l'équation pour $\tilde{\alpha}(t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\alpha}(t) - i(\omega-\omega_0)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(t) + \frac{\omega_1^2}{4}\tilde{\alpha}(t) = 0. \tag{3}$$

Nous introduisons $\delta = \omega - \omega_0$ et nous obtenons l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - i\delta\lambda + \frac{\omega_1^2}{4} = 0.$$

Les solutions de cette équation du second degré sont

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \frac{1}{2}\left(i\delta \pm \sqrt{-\delta^2 - \omega_1^2}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(\delta \pm \Omega\right), \end{aligned}$$

avec $\Omega = \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}$. Ces solutions sont distinctes pour $B_1 \neq 0$ ou $\omega \neq (\gamma/\hbar)B_0$. La solution générale à l'équation (3) s'écrit alors

$$\tilde{\alpha}(t) = Ae^{\frac{i}{2}(\delta+\Omega)t} + Be^{\frac{i}{2}(\delta-\Omega)t}.$$

4. En utilisant les conditions initiales, nous pouvons trouver l'expression des coefficients A et B:

$$\tilde{\alpha}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad A + B = 1 \tag{4}$$

$$\tilde{\beta}(0) = 0 \tag{5}$$

La condition (5) s'écrit:

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{\beta}(0) &= -\frac{2i}{\omega_1} e^{-i\delta t} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\alpha}(0) \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\alpha}(0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & A \frac{i}{2}(\delta + \Omega) + B \frac{i}{2}(\delta - \Omega) = 0 \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la condition (4), $A = 1 - B$:

$$(1 - B)(\delta + \Omega) + B(\delta - \Omega) = 0.$$

Ainsi les coefficients A et B deviennent:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\delta + \Omega}{2\Omega} \\ A &= 1 - \frac{\delta + \Omega}{2\Omega} = \frac{\Omega - \delta}{2\Omega}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression pour $\tilde{\alpha}(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t) &= \frac{\Omega - \delta}{2\Omega} e^{\frac{i}{2}(\Omega + \delta)t} + \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} e^{-\frac{i}{2}(\Omega - \delta)t} \\ \tilde{\alpha}(t) &= \frac{e^{i\frac{\delta}{2}t}}{\Omega} \left[\Omega \cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right) - i\delta \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \right]. \end{aligned}$$

De même, pour $\tilde{\beta}(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(t) &= -\frac{2i}{\omega_1} e^{-i\delta t} \left[\frac{i}{2}(\Omega + \delta) \frac{\Omega - \delta}{2\Omega} e^{\frac{1}{2}(\Omega + \delta)t} - \frac{i}{2}(\Omega - \delta) \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} e^{-\frac{i}{2}(\Omega - \delta)t} \right] \\ &= -\frac{2i}{\omega_1} e^{-i\delta t} \left[\frac{i}{2} \frac{\Omega^2 - \delta^2}{2\Omega} e^{\frac{1}{2}(\delta + \Omega)t} - \frac{i}{2} \frac{\Omega^2 - \delta^2}{2\Omega} e^{-\frac{i}{2}(\Omega - \delta)t} \right] \\ &= -\frac{2i}{\omega_1} \frac{i}{2} \frac{\omega_1^2}{2\Omega} e^{-i\delta t/2} \left[e^{i\Omega t/2} + e^{-i\Omega t/2} \right] \\ &= \frac{\omega_1}{2\Omega} e^{-i\delta t/2} 2i \sin\left(\Omega t/2\right), \end{aligned}$$

d'où découle finalement

$$\tilde{\beta}(t) = \frac{i\omega_1}{\Omega} e^{-i\delta t/2} \sin\left(\Omega t/2\right).$$

La probabilité de trouver le spin dans l'état $|1\rangle$ est

$$\begin{aligned} P(1) = |\beta(t)|^2 &= |\tilde{\beta}(t)|^2 \\ &= \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\Omega t/2\right) \\ &= \frac{\omega_1^2}{2\Omega^2} \left[1 - \cos(\Omega t)\right]. \end{aligned}$$

Cette probabilité oscille donc avec la pulsation Ω. La réécriture explicite de $P(1)$ en fonction de ω,

$$P(1) = \frac{\omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2} \sin^2 \left(\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}\; t/2 \right),$$

montre que l'amplitude des oscillations est maximale pour $\omega = \omega_0$ et admet une forme lorentzienne (de largeur ω_1) autour de ce maximum.