Exercice 1 *Etats comprimés (squeezed states)*

Les états comprimés constituent un champ de recherches très important en physique quantique fondamentale. Considérons les opérateurs d'échelle usuels $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ tels que définis pour l'oscillateur harmonique. On définit un état comprimé en appliquant l'opérateur de *squeezing*:

$$\hat{S}(\xi) = e^{\left(\frac{1}{2}\xi^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi\hat{a}^{\dagger 2}\right)}$$

Ici ξ est un nombre complex.

1. Montrer que $\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}^{-1}(\xi) = \hat{S}(-\xi)$ où $\hat{S}^{-1}$ désigne l'inverse de $\hat{S}$. On utilisera le résultat suivant: si deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent ($[\hat{A}, \hat{B}] = 0$) alors $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}$.

2. Montrer que le commutateur d'ordre n de $\hat{A} = \frac{1}{2}\xi\hat{a^\dagger}^2 - \frac{1}{2}\xi^*\hat{a}^2$ avec $\hat{B} = \hat{a}$, c'est-à-dire $[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}......\hat{B}]]]$ où $\hat{A}$ apparaît n fois est égal à:
   - $|\xi|^n\hat{a}$ si n est pair
   - $-|\xi|^{n-1}\xi\hat{a}^\dagger$ si n est impair

3. Déduire du résultat précédent qu'avec $\xi = re^{i\theta}$, on a
$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = -\hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r) + \cosh(r)\hat{a} \ .$$
   Pour cela on utilisera la formule suivante
$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]]... \ .$$

4. En déduire que
$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = -\hat{a}e^{-i\theta}\sinh(r) + \cosh(r)\hat{a}^\dagger \ .$$

5. Définissons l'état comprimé du vide comme l'état obtenu en appliquant l'opérateur de *squeezing* sur le vide, c'est-à-dire $\hat{S}(\xi)|0\rangle$. Calculer pour cet état les moyennes de $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}^2$, $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, $\hat{a}^{\dagger 2}$ et finalement $\Delta x\Delta p$. Que peut-on en conclure sur l'incertitude en x et p? Quelle est la différence avec l'état fondamental $|0\rangle$?
   Suggestion: On pourra utiliser la relation $\hat{S}(\xi)\hat{C}\hat{D}\hat{S}(\xi)^\dagger = \hat{S}(\xi)\hat{C}\hat{S}(\xi)^\dagger\hat{S}(\xi)\hat{D}\hat{S}(\xi)^\dagger$

6. Question bonus: On considère maintenant un oscillateur harmonique dont la fréquence de résonance est ω et donc décrit par l'Hamiltonien
$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$$
   En appliquant l'opérateur unitaire d'évolution temporelle $\hat{\mathcal{U}} = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$ au vide comprimé trouvez l'equation d'évolution pour les variances Δx et Δp.