Exercice 1 *Etats comprimés (squeezed states)*

On introduit l'opérateur :

$$\hat{S}(\xi) = e^{-\hat{A}(\xi)} \quad \text{et} \quad \hat{A}(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^*\hat{a}^2 + \frac{1}{2}\xi\hat{a}^{\dagger 2} \tag{1}$$

1. On note les propriétés suivantes pour $\hat{A}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \hat{A}(-\xi) &= -\hat{A}(\xi) \\ \hat{A}(\xi)^\dagger &= -\hat{A}(\xi) \end{aligned} \tag{2}$$

Qui conduisent aux propriétés suivantes pour $\hat{S}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \hat{S}(-\xi) &= e^{+\hat{A}(\xi)} \\ \hat{S}(\xi)^\dagger &= e^{+\hat{A}(\xi)} = \hat{S}(-\xi) \end{aligned} \tag{3}$$

Il reste à montrer que $\hat{S}(\xi)^\dagger = \hat{S}(\xi)^{-1}$, et donc que $\hat{S}(\xi)^\dagger\hat{S}(\xi) = 1$:

$$\hat{S}(\xi)^\dagger\hat{S}(\xi) = e^{\hat{A}(\xi)}e^{-\hat{A}(\xi)} \overset{[\hat{A},-\hat{A}]=0}{=} e^{\hat{A}(\xi)-\hat{A}(\xi)} = e^0 = 1 \tag{4}$$

2. Nous allons démontrer ce résultat par récurrence. On aura besoin des commutateurs suivants :

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] &= 1 \\ \left[\hat{a}^2, \hat{a}\right] &= 0 \\ \left[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}^\dagger\right] &= 0 \\ \left[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}\right] &= -2\hat{a}^\dagger \\ \left[\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger\right] &= 2\hat{a} \end{aligned} \tag{5}$$

Pour commencer, on vérifie le résultat pour $n = 0, 1$[1]:

$$\begin{aligned} n = 0 &\quad : \quad \hat{a} = \hat{a} = |\xi|^0\hat{a} \\ n = 1 &\quad : \quad \left[\hat{A}, \hat{a}\right] = -\tfrac{1}{2}\xi^*\left[\hat{a}^2, \hat{a}\right] + \tfrac{1}{2}\xi\left[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}\right] = -\xi\hat{a}^\dagger = -|\xi|^0\xi\hat{a}^\dagger \end{aligned} \tag{6}$$

Ensuite, on suppose que c'est vrai pour $n = N$, et on vérifie que cela implique le résultat pour $N + 1$. Deux cas se présentent alors, N pair ou impair. Prenons le premier cas :

$$\begin{aligned} \big[\hat{A}, \underbrace{\big[\hat{A}, \ldots \big[\hat{A}, \hat{a}\big] \ldots\big]}_{N \text{ fois } \hat{A}}\big] &= \big[\hat{A}, |\xi|^N\hat{a}\big] = \tfrac{1}{2}\xi|\xi|^N\big[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}\big] \\ &= -|\xi|^N\xi\hat{a}^\dagger = -|\xi|^{(N+1)-1}\xi\hat{a}^\dagger \end{aligned} \tag{7}$$

ok. Ensuite N impair :

$$\begin{aligned} \big[\hat{A}, \underbrace{\big[\hat{A}, \ldots \big[\hat{A}, \hat{a}\big] \ldots\big]}_{N \text{ fois } \hat{A}}\big] &= \big[\hat{A}, (-1)|\xi|^{N-1}\xi\hat{a}^\dagger\big] = -\tfrac{1}{2}\xi^*(-1)|\xi|^{N-1}\xi\big[\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger\big] \\ &= |\xi|^{(N-1)+2}\hat{a} = |\xi|^{N+1}\hat{a} \end{aligned} \tag{8}$$

ok. Donc la relation est vraie pour tout N.

[1] On pourrait se contenter de le montrer pour $n = 0$.

3. On notera $\xi = re^{i\theta}$. En utilisant la relation de Baker-Campbell-Hausdorff on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) &= e^{+\hat{A}(\xi)} \hat{a} e^{-\hat{A}(\xi)} \\
&= \hat{a} + \left[\hat{A}, \hat{a}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{a}\right]\right] + \frac{1}{3!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{a}\right]\right]\right] + \dots \\
&= \hat{a} + \frac{1}{2!}|\xi|^2 \hat{a} + \frac{1}{4!}|\xi|^4 \hat{a} + \dots - \xi \hat{a}^\dagger - \frac{1}{3!}|\xi|^2 \xi \hat{a}^\dagger - \frac{1}{5!}|\xi|^4 \hat{a}^\dagger + \dots \\
&= \hat{a}\left(1 + \frac{1}{2!}r^2 + \frac{1}{4!}r^4 + \dots\right) - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\left(r + \frac{1}{3!}r^3 + \frac{1}{5!}r^5 + \dots\right) \\
&= \hat{a}\cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r) \qquad (9)
\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a}\cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r)} \qquad (10)$$

4. Pour trouver le même résultat avec $\hat{a}^\dagger$ on utilisera :

$$\left(\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi)\right)^\dagger = \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \qquad (11)$$

et donc :

$$\boxed{\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger\cosh(r) - \hat{a} e^{-i\theta}\sinh(r)} \qquad (12)$$

5. A présent nous devons évaluer plusieurs quantités sur l'état :

$$|\psi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle \qquad (13)$$

Souvenons-nous que $\hat{a}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^\dagger = 0$ et évaluons $\langle \hat{a}\rangle$, $\langle \hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle \hat{a}^2\rangle$, $\langle \hat{a}^{\dagger 2}\rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$ et $\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$. Sur l'état du vide, seul $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle_{|0\rangle} = \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle_{|0\rangle} + \langle 1\rangle_{|0\rangle} = 1$ est non-nul.

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{a}|\psi\rangle &= \langle 0|\dots\hat{a} + \dots\hat{a}^\dagger|0\rangle = 0 \qquad (14)\\
\langle\psi|\hat{a}^\dagger|\psi\rangle &= \left(\langle\psi|\hat{a}|\psi\rangle\right)^\dagger = 0 \qquad (15)\\
\langle\psi|\hat{a}^2|\psi\rangle &= \langle 0|\hat{S}^\dagger\hat{a}\underbrace{\hat{S}\hat{S}^\dagger}_{=1}\hat{a}\hat{S}|0\rangle =
\end{aligned}$$

par la remarque de dessus, seule la partie $\propto \hat{a}\hat{a}^\dagger$ va contribuer :

$$\begin{aligned}
&= \langle 0| \underbrace{\hat{S}^\dagger\hat{a}\hat{S}}_{\supset \hat{a}\cosh(r)} \overbrace{\hat{S}^\dagger\hat{a}\hat{S}}^{\supset -\hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r)} |0\rangle = \\
&= -e^{i\theta}\cosh(r)\sinh(r) \qquad (16)\\
\langle\psi|\hat{a}^{\dagger 2}|\psi\rangle &= \left(\langle\psi|\hat{a}^2|\psi\rangle\right)^\dagger = -e^{-i\theta}\cosh(r)\sinh(r) \qquad (17)\\
\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle &= \langle 0| \underbrace{\hat{S}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{S}}_{\supset -\hat{a}e^{-i\theta}\sinh(r)} \overbrace{\hat{S}^\dagger\hat{a}\hat{S}}^{\supset -\hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r)} |0\rangle = \\
&= \sinh^2(r) \qquad (18)\\
\langle\psi|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|\psi\rangle = \cosh^2(r) \qquad (19)
\end{aligned}$$

Pour vérifier ces résultats, on peut utiliser le fait que pour $r = 0$ on a $|\psi\rangle = |0\rangle$. Et en effet, seul le dernier résultat est non-nul dans cette limite. On peut à présent étudier les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - a\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Avec les résults trouvés ci-dessus il est clair que :

$$\langle\hat{x}\rangle = 0 \tag{21}$$
$$\langle\hat{p}\rangle = 0 \tag{22}$$

Ensuite il faut simplement additionner les résultats élémentaires :

$$\begin{aligned} \left\langle\hat{x}^2\right\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[-e^{+i\theta}\sinh(r)\cosh(r) - e^{-i\theta}\sinh(r)\cosh(r) + \cosh^2(r) + \sinh^2(r)\right] \\ &= \frac{\hbar}{m\omega}\left[\sinh^2(r) + \frac{1}{2} - \cos(\theta)\sinh(r)\cosh(r)\right] \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \left\langle\hat{p}^2\right\rangle &= -\frac{m\omega\hbar}{2}\left\langle \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\rangle \\ &= \frac{m\omega\hbar}{2}\left[+e^{+i\theta}\sinh(r)\cosh(r) + e^{-i\theta}\sinh(r)\cosh(r) + \cosh^2(r) + \sinh^2(r)\right] \\ &= m\omega\hbar\left[\sinh^2(r) + \frac{1}{2} + \cos(\theta)\sinh(r)\cosh(r)\right] \end{aligned} \tag{24}$$

Vu que les moyennes de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont nulles, on a que $\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle}$ et $\Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle}$. Avec un peu d'algèbre on obtient :

$$\boxed{\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 + 4\sin^2(\theta)\sinh^2(r)\cosh^2(r)}} \tag{25}$$

Voilà pour le résultat. Il mérite néanmoins quelques commentaires :

- Pour $r = 0$ on retrouve le résultat de l'état du vide de l'oscillateur harmonique. Ceci est une vérification!
- Pour $\theta = 0, \pi$ (càd. $\xi \in \mathbb{R}$) on obtient également une relation d'incertitude minimale.
- On peut étudier comment cette incertitude est répartie. Pour le vide de l'oscillateur harmonique on a :

  $$\left.\frac{\Delta x}{\Delta p}\right|_{|0\rangle} = \frac{1}{m\omega} \tag{26}$$

  Et pour le “vide comprimé” on a :

  $$\left.\frac{\Delta x}{\Delta p}\right|_{|\psi\rangle} = \frac{1}{m\omega}\sqrt{\frac{1 + 2\sinh(r)\left[\sinh(r) - \cos(\theta)\cosh(r)\right]}{1 + 2\sinh(r)\left[\sinh(r) + \cos(\theta)\cosh(r)\right]}} \tag{27}$$

le paramètre $\xi = \pm r$ ($\theta = 0, \pi$) permet donc de diminuer/augmenter l'incertitude en x, tout en augmentant/diminuant l'incertitude en p, mais en maintenant la relation de Heisenberg minimale (relation saturée).

Cette propriété peut être utilisée de différentes façons. Par exemple en télécommunication où le bruit est donné par Δx, ou alors pour faire de l'interférométrie de grande précision (nécessaire par exemple pour détecter des ondes gravitationnelles).