Mécanique Quantique II, Examen Blanc - Corrigé

Epreuve du 5 mai 2015 - durée : 120 minutes

Exercice 1 : Effet Stark quantique confiné (2.5 points)

1. Le potentiel total est un potentiel à barrière infini avec un fond incliné selon une droite de pente positive $F = -eE$ ($E < 0$).

2. L'hamiltonien du système perturbé s'écrit:
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) + F\hat{x} \tag{1}$$
Dans le cas où $F = 0$ les energies propres de l'électron confiné sont
$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, n > 0 \tag{2}$$
et les fonctions d'onde correspondantes
$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ si } n \text{ est impair} \tag{3}$$
$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ si } n \text{ est pair} \tag{4}$$

3. Dans le cas où $F \neq 0$, la correction d'énergie de l'état fondamental est la valeur moyenne de l'operateur de perturbation sur les états non perturbés à savoir
$$E_1^{(1)} = \int_{-L/2}^{+L/2} \varphi_1^*(x) F x \varphi_1(x)\, dx = \frac{2F}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx \tag{5}$$
Directement en constatant que $x \mapsto x\cos^2(x)$ est impaire ou en intégrant par partie on trouve $E_1^{(1)} = 0$.

4. La correction d'énergie des 2 premiers états excité valent
$$E_2^{(1)} = \frac{2F}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx \tag{6}$$
$$E_3^{(1)} = \frac{2F}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x \cos^2\left(\frac{3\pi}{L}x\right) dx \tag{7}$$
et impliquent également des intégrandes impaires et cela est en fait le cas quel que soit n donc on a simplement $E_n^{(1)} = 0$ pour tout n.

5. La correction d'énergie $E_1^{(2)}$ de l'état fondamental à l'ordre 2 implique les élements de matrice non-nuls
$$V_{1j} = \frac{2F}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx \tag{8}$$

seulement si j est pair. En effet dans les cas où j est impaire les élements sont nuls par parité. Si l'on ne considère que le couplage avec le premier niveau excité à savoir $j = 2$ la correction à l'état fondamental vaut simplement

$$E_1^{(2)} = -\frac{V_{21}^* V_{21}}{E_2 - E_1} \tag{9}$$

avec

$$V_{21} = \frac{16}{9\pi^2} F L \tag{10}$$

en utilisant l'identité $\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)/2$ et en intégrant par partie $x \sin(2x)$. Et donc finalement

$$E_1^{(2)} = -\frac{256}{243\pi^4} \frac{F^2 L^2}{E_1} \tag{11}$$

6. La fonction d'onde de l'état fondamental devient asymétrique et se localise où le potentiel total est le plus faible.

Exercice 2 : Particules en interaction dans un puit de potentiel (2.5 points)

1. Les 3 états possibles sont

$$\begin{aligned}
\psi_1(x_1, x_2) &= \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2) && (12)\\
\psi_2(x_1, x_2) &= [\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)]/\sqrt{2} && (13)\\
\psi_3(x_1, x_2) &= \varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2) && (14)
\end{aligned}$$

2. Les corrections d'énergie à l'ordre 1 sont données par

$$\Delta E_j^{(1)} = \langle \psi_j | \hat{V}_{\text{int}} | \psi_j \rangle \tag{15}$$

Et en particulier en utilisant la définition de la fonction delta

$$\begin{aligned}
\Delta E_1^{(1)} &= V_0 \int \psi_1^4(x_1)\, dx_1 && (16)\\
\Delta E_2^{(1)} &= \frac{V_0}{2} \int \psi_1^2(x_1)\,\psi_2^2(x_1)\, dx_1 && (17)\\
\Delta E_3^{(1)} &= V_0 \int \psi_2^4(x_1)\, dx_1 && (18)
\end{aligned}$$

3. Un seul état possible dans ce cas

$$\psi_1(x_1, x_2) = [\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)]/\sqrt{2} \tag{19}$$

Dans ce cas la correction d'énergie

$$\Delta E_1^{(1)} = V_0 \int \left[\varphi_1^2(x_1)\varphi_2^2(x_1) - \varphi_1^2(x_1)\varphi_2^2(x_1)\right] dx_1 = 0 \tag{20}$$

est nulle. Ceci est prévisible dans la mesure où le potentiel agit lorsque les particules sont à la même position ce qui est interdit pour une fonction d'onde impaire en l'absence de spin.

Exercice 3 : Information quantique (1 point)

Pour savoir si les modes d'emploi peuvent être distingués, il faut trouver une quantité observable qui, si mésurée, donne des valeurs moyennes différentes pour les différents modes d'emploi. Une condition nécessaire pour pouvoir distinguer deux modes d'emploi est que les matrices densité associées soient différentes. En effet, si les deux matrices densité coïncident (sur la même base), alors la mesure de n'importe quelle observable donnera les mêmes valeurs moyennes dans les deux cas. Calculons $\hat{\rho}_A$, $\hat{\rho}_B$, et $\hat{\rho}_C$.

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A &= \frac{1}{2}\left(|\psi_p\rangle\langle\psi_p| + |\psi_f\rangle\langle\psi_f|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)\end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_B &= \frac{1}{2}\left(|\psi_p\rangle\langle\psi_p| + |\psi_f\rangle\langle\psi_f|\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\right. \\ &+ \left.|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)\end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_C &= \frac{1}{2}\left(|\psi_p\rangle\langle\psi_p| + |\psi_f\rangle\langle\psi_f|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)\left(\langle 0| - i\langle 1|\right)\right) \\ &= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| - \frac{i}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{i}{4}|1\rangle\langle 0|\end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Il est donc impossible pour Bob de distinguer A de B. Il pourra par contre distinguer C de A et B. Pour le montrer il suffit de trouver les valeurs propres de $\hat{\rho}_c$. La simple solution du problème aux valeurs propres donne $p_C = (2 \pm \sqrt{2})/4 \simeq 0.854,\ 0.146$. A Bob ne reste que choisir une quantité observable qui soit de la forme

$$\hat{O}_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base qui diagonalise $\hat{\rho}_C$. La mesure d'une telle observable sur le mélange C donnera 85.4% des fois -1 et 14.6% des fois $+1$, alors que pour les modes d'emploi A et B, la mesure de O_C aura toujours une valeur moyenne nulle.