Equations de Maxwell

Forme locale	Forme intégrale
$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$	$\int_{\Sigma_{\text{fermé}}}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_\Omega\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\omega$
$\nabla\wedge\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\int_{\Sigma_{\text{fermé}}}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0$
$\nabla\wedge\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

Ondes

Ondes indéformables

- **progressive** : $\xi(x,t)=\xi(x-ut)$
- retrograde : $\xi(x,t)=\xi(x+ut)$
- u = vitesse de propagation (célérité)
  Attention : $u\neq v=\frac{\partial\xi}{\partial t}$
  Déplacement transversal des particules ! !
- **Eq. de d'Alembert** : $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=u^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$
- longitudinale : $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{u}$, transversale : $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{u}$
- **onde sinusoïdale/harmonique** :
  - $\Psi(x,t)=\Psi_0\sin(k(x-ut))$
    Ψ_0 : amplitutde
  - longeur d'onde : λ tq. $\xi(x+\lambda,t_0)=\xi(x,t_0)$
  - nombre d'onde : $k=\frac{2\pi}{\lambda}$
  - période : T tq. $\xi(x_0,t+T)=\xi(x_0,t)$
  - fréquence : $f=\frac{1}{T}$ [Hz]
  - pulsation : $\omega=2\pi f=ku$
  - source $\Rightarrow\lambda,f$; milieu $\Rightarrow u$
  - milieu dispersif : $u=u(\lambda)$, non-disp. : $u=cste$
- **onde plane :**
  - **Eq. de d'Alembert (3D)** : $\nabla^2\Psi(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$
  - **onde plane** : $\Psi_1(\boldsymbol{x},t)=\sum_\pm\Psi_1(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}\pm ut)$
    vit. de prop. : $\boldsymbol{u}=u\hat{\boldsymbol{n}}$
    front d'onde : plan $\perp\hat{\boldsymbol{n}}$ tq. $\Psi=cste$
  - onde plan harmonique :
    $\Psi(\boldsymbol{x},t)=\Psi_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\mp\omega t)=\mathrm{Im}\left(\Psi_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\mp\omega t)}\right)$
    $\boldsymbol{k}=k\hat{\boldsymbol{n}}$
  - **onde sphérique** : $\Psi(r,t)=\sum_\pm\frac{1}{r}\Psi_1(r\pm ut)$
    éq. de d'Alembert : $\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial t^2}=0$
  - **onde de pression dans un fluide parfait** :
    - éq. de d'Alembert : $\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{1}{\kappa\rho_r}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$; $u^2=\frac{1}{\kappa\rho_r}$
    - gaz parfait : $u=\sqrt{\frac{\gamma p_r}{\rho_r}}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, $\gamma=\frac{C_p}{C_V}$
    - air : $\gamma=\frac{7}{5}$, $p_r=1atm$, $\rho_r=1.18\frac{g}{dm^3}$, $T=300K\Rightarrow u=348\frac{m}{s}$
    - mvt piston sinusoïdal :
      - déplacement : $\xi(x,t)=\xi_0\sin(kx-\omega t)$
      - pression : $p-p_r=-\frac{1}{\kappa}k\xi_0\cos(kx-\omega t)$
      - vitesse : $v(x,t)=\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\omega\xi_0\cos(kx-\omega t)$
    - onde accoustique = onde de pression dans un gaz
    - $\Delta p=\pm\rho uv$
  - **onde élastique dans un barreau solide** :
    - éq. de d'Alembert : $\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$; $S,\rho cste$
    - $u_{\text{onde longitudinale}}>u_{\text{onde de cisaillement}}$
  - **Impéndance d'un milieu** : $Z=\frac{\text{cause}}{\text{effet}}$
    - onde de pression : $Z=\frac{p(x,t)-p_r}{v(x,t)}$
    - onde élastique : $Z=\frac{\sigma(x,t)}{v(x,t)}$
    - onde transversale sur une corde : $Z=\frac{F\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}}{v(x,t)}$
    - milieu de ρ (vol./lin.) : $Z=\pm\rho u$

Autres types d'ondes

- **onde à la surface d'un liquide** :
  - $u=\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}}$
    ρ : densité, γ : tension sup., h hauteur de liq.
  - $h\gg\lambda$: (ondes dispersives)
    onde de gravité : λ grand, $u^2=\frac{g\lambda}{2\pi}$
    onde capillaire : λ faible, $u^2=\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}$
  - $h\ll\lambda\quad\Rightarrow\quad u\approx\sqrt{gh}$
- onde de Rayleigh : transversale et longitudinale
- onde le long d'une ligne électrique :
  $\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=LC\frac{\partial^2V}{\partial x^2}$; $u^2=\frac{1}{LC}$; V : tension él.
- onde de pression d'amplitude finie :
  $u_{\text{rel}}(x)=u_{\text{lin}}+\left(1+\frac{B}{2A}\right)v(x)$

Aspets énergetiques

- **densité d'énergie** - onde dans un milieu matériel :
  $e(x,t)=\frac{1}{2}\rho u^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2$
  onde progressive (où retrograde) : $e(x,t)=\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2$
- densité d'énergie moyenne - onde sinusoïdale :
  $\bar{e}=\frac{1}{T}\int_0^Te(x,t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$
- **intensité d'une onde** : $I=\frac{\bar{P}}{S}=u\bar{e}=Z\bar{v^2}$ $[W/m^2]$
  $P(x,t)=Sue(x,t)\ \Rightarrow\ \bar{P}=Su\bar{e}\,[W]$
  sinusoïdale : $I=\frac{1}{2}\rho u\omega^2\xi_0^2$
- intensité d'une **onde sonore** : $L=10\log\frac{I}{I_0}$ [dB]
  $I_{0,\text{air}}=10^{-12}\frac{W}{m^2}$
- **Attenuation d'une onde** : $I(x)=I(x_0)e^{-2\alpha(x-x_0)}$
  α : coefficient d'atténuation $[m^{-1}]$

Effet Doppler

- $f'=f\frac{u-v_0}{u-v_s}$
  $v_s>0$: le source s'approche de l'obs.
  $v_0>0$: l'obs. s'éloigne du source
- fréquence Doppler : $f_D=|f'-f|$
- $u\gg v_0,v_s$: $f'\approx f\left(1-\frac{v}{u}\right)$; $v=v_0-v_S$
- ondes electromagnétiques : $f'=f\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}2$
- onde de choc : front d'onde = cône, $\alpha=\arcsin\frac{u}{v_s}$

Lois générales de la propagation d'ondes

- **principe de superposition** : $\Psi(x,t)=\Psi_1+\Psi_2$
- **principe de Huyghens** : onde = superpos. de toutes les ondelettes
- **principe de Fermat** : temps de parcours d'une onde entre A et B minimal

Superposition d'ondes

- **Ondes stationnaires** :
  - onde stat. = 2 ondes dans dir. opposées
    $\Psi(x,t)=2\Psi_0\sin(kx)\cos(\omega t)$
    noeuds : $\xi=0\ \forall t$; ventres : ξ max.
  - $\Psi(\boldsymbol{x},t)=\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\theta(t)=\phi(\boldsymbol{x})\theta(t)$
  - 1D : $\Psi(x,t)=\{A\sin(kx)+B\cos(kx)\}\sin(\omega t)$
  - fréquences propres / harmoniques :
    - f_1 : fréquence fondamentale
    - corde fixé : $\lambda_n=\frac{2L}{n}$, $f_n=\frac{nu}{2L}$
    - colonne d'aire (ouvert aux 2 extrémités) : $f_n=\frac{nu}{2L}$
    - une extrémité fermée : $f_n=\frac{u}{\lambda}=\frac{(2n-1)u}{4L}$
- **Battments** :
  - $p-p_r=2A\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$
    $A_1=A_2$
    onde de $\frac{f_1+f_2}{2}$ modulée par onde de $\frac{f_1-f_2}{2}$
    fréquence de battement : $f_b=f_1-f_2$
- **Vitesse de phase / vitesse de groupe** :
  - pulse = superpos. d'ondes sinus de fréq voisins
  - $f_1\approx f_2,A_1\approx A_2,k_1\approx k_2$
    $\Psi=2\Psi_0\sin(k_1x-\omega_1t)\cos\frac{(k_2-k_1)x-(\omega_2-\omega_1)t}{2}$
  - vitesse de groupe : $u_g=\frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}\approx\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$
  - milieu dispersif : vit. de l'information = vit. de groupe
    $u=u(\omega)$, rél. de dispersion : $\omega=\omega(k)$; $u=u(k)$
  - $u_g=u+k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}k}$
- **Interféerences de sources synchrones** :
  - synchrone / cohérentes : $f_1=f_2,\phi_1-\phi_2=cste$
  - $\Delta p_i(r_i,t)=\frac{A}{r_i}\sin(kr_i-\omega t)$
    $r_1,r_2\gg\|\boldsymbol{x}_{S_1}-\boldsymbol{x}_{S_2}\|$
    $\Delta p=2\frac{A}{r_1}\cos\frac{k(r_1-r_2)}{2}\sin\left(\frac{k(r_2-r_1)}{2}-\omega t\right)$
  - interférences constructives : $r_1-r_2=n\lambda$
  - interférences destructives : $r_1-r_2=\frac{(2n+1)\lambda}{2}$
  - (sources non synchrones : $I=I_1+I_2$)
  - $I(P)=\frac{\overline{\Delta p^2}}{Z}=\frac{1}{Z}\left\{\overline{\Delta p_1^2}+\overline{\Delta p_2^2}+2\overline{\Delta p_1\Delta p_2}\right\}$
  - $r_1\approx r_2$: $I(P)=4I_0(P)\cos^2\left(\frac{ka\sin\theta}{2}-\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$
  - $\phi_1-\phi_2=0$, max en $a\sin\theta=n\lambda$
    n = ordre de l'interférence
  - nbr. de sources > 2 $\Rightarrow$ réseaux

Interactions ondes-milieu de propagation

- **Réfraction** : mise en vibration par l'onde incidente
  - loi de Descartes : $\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_t}=\frac{u_1}{u_2}$
  - loi de Snell (ondes e.m.) : $\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_t}=\frac{n_2}{n_1}$, $n_i=\frac{c}{u_i}$
  - réflection totale : $u_2>u_1$ et $\alpha_i>\frac{u_1}{u_2}$
- **Réflexion** : $\alpha_i=\alpha_r$
  - onde plane $\rightarrow$ onde plane
    onde sphérique $\rightarrow$ onde sphérique
  - film mince :
    interférence constructive $\Leftrightarrow 2L=\frac{(2m+1)\lambda_2}{2}$
    interférence destructive $\Leftrightarrow 2L=m\lambda_2$
    $\lambda_2=\frac{\lambda}{2}$
- **Coef. de transmission/réflexion** :
  $T=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}\leq 0,\phi_t=0$
  $R=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\lessgtr 0,\phi_r=\begin{cases}0 & (Z_2>Z_1)\\ \pi & sinon\end{cases}$
  - $R\in[-1,1],T\in[0,2],T=1+R$
  - $R^2=\frac{I_r}{I_i},T^2=\frac{I_t}{I_i}\frac{Z_1}{Z_2},R^2+T^2\frac{Z_2}{Z_1}=1$
  - transmission totale s'il y a *adaption* ($Z_1=Z_2$)
  - onde e.m. : $\frac{I_r}{I_i}=\frac{(n_1-n_2)^2}{n_1+n_2)^2}$, $\frac{I_t}{I_i}=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$
    onde incidente normale !
- **Diffraction** : $\lambda\approx d_{\text{trou}}\ll r,h_{\text{trou}}\ll\lambda$
  - Diff. de Fraunhofer : ondes inc. planes, observ. loin
  - $\Delta p(\boldsymbol{r}_0,t)=\frac{Ahb}{r_0}\frac{\sin\frac{kb\sin\theta}{2}}{\frac{kb\sin\theta}{2}}\sin(kr_0-\omega t)$
  - $I(Q)=I_0\left(\frac{\sin\chi}{\chi}\right)^2$
    $\chi=\frac{kb\sin\theta}{2}=\frac{b\pi}{\lambda}\sin\theta,I_0=\frac{1}{2Z}\left(\frac{Ahb}{r_0}\right)^2$
  - ouverture = disque $R\approx\lambda\ \Rightarrow$ tache centrale (d'Airy ; $\sin\theta=\frac{1.22\lambda}{2R_{\text{trou}}}$)+ anneaux concentriques
- **Diffusion** : obstacle de dim. $\sim\lambda\Rightarrow$ obstacle $\rightarrow$ source

Ondes électromagnétiques

- **Milieux lin. sans charge/courant** :
  (vide, air, diélectriques homogènes et isotropes)
  - d'Alembert :
    $\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$
    $\nabla^2\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$
  - vit. de prop. : $u=\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r}}$
    vide : $u=c=\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}=2.997925\cdot10^8\,\frac{m}{s}$
  - $\boldsymbol{E}(x,t)=E_{0y}\sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_y$
    $\boldsymbol{B}(x,t)=B_{0z}\sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_z$
    $\frac{E_{0y}}{B_{0z}}=u$, $\boldsymbol{E}$ *polarisée linéairement*
  - lumière *non polarisée* : $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$
    $E_y(x,t)=E_{0y}\sin(kx-\omega t+\phi_y(t))$
    $E_z(x,t)=E_{0z}\sin(kx-\omega t+\phi_z(t))$
  - *pol. elliptiquement* : $\phi=\phi_z-\phi_y\neq k\pi$ indép. du temps
    $\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2+\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2-\frac{2E_yE_z}{E_{0y}E_{0z}}\cos\phi=\sin^2\phi$
  - *pol. circulairement* : $\phi=\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $E_{0y}=E_{0z}$
  - photons : $\varepsilon=hf$
  - densité d'énergie : $\bar{e}=\overline{u_{\text{EM}}}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2,I=\frac{1}{2}\varepsilon_0cE_0^2$
  - indice de réfraction : $n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$
  - milieu dispersif : $n=n(f)$
- **Milieux anisotropes** :
  - tenseur des const. diélectriques :
    isotrope : $n_1=n_2=n_3$, *uni-axe* : $n_1\neq n_2=n_3$, *bi-axe* : $n_1\neq n_2\neq n_3$
  - *Biréfringence* :
    onde incidente (non pol.) = 2 ondes pol. lin. $\perp$
    $u_{\text{ord}}=\frac{c}{n_2},\frac{c}{n_1}<u_{\text{extraord}}<\frac{c}{n_2}$
  - Polarisateur (*loi de Malus*) : $I\propto I_0^2\cos^2\theta$
- **Milieux conducteurs** : (lin. $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$)
  - $\boldsymbol{E}(x,t)=E_0e^{-\alpha x}\sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_y$
  - $\boldsymbol{B}(x,t)=B_0e^{-\alpha x}\sin(kx-\omega t+\phi)\hat{\boldsymbol{e}}_z$
  - $\alpha^2=\frac{-\frac{\omega^2}{u^2}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{u^2}\right)^2+(\mu\sigma\omega)^2}}{2}$
  - $\mu\sigma\omega\gg\frac{\omega^2}{u^2}\Rightarrow$ prof. de pen. : $\delta=\alpha^{-1}=\sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$
- **Propagation guidée**
  - diélectrique linéaire :
    $\boldsymbol{E}_d\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{\rho_s}{\varepsilon},\boldsymbol{H}_d\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=0,$
    $\boldsymbol{E}_d\wedge\hat{\boldsymbol{n}}=0,\boldsymbol{H}_d\wedge\hat{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{J}_s$

- $\boldsymbol{E} = E_0 \sin(k_y y) \sin(k_x x - \omega t) \hat{\boldsymbol{e}}_z$
  $k_x = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}, \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}$
- $\boldsymbol{B}$ circule autour d'où $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ plus grand
- fréquence de coupure : $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2a}$
- vitesse de phase : $u = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}} (> c\,!!!)$
  vitesse de groupe : $u_g = c\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2} \leqslant c$
- puissance EM moyenne : $\overline{P} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 a b u_g E_0^2$

- **Superposition/interactions d'ondes EM**
  - *Diffusion* :
    - dipôle de Hertz : $p(t) = \frac{q^2}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega t$
      $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\left|\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right|\sin\theta, B = \frac{E}{c}$
      $I(r,\theta) \propto \frac{p_o^2\omega^4}{r^2}\sin^2\theta$
    - loi de Rayleigh : $I(r,\theta) \propto \frac{1}{r^2}\frac{\omega^4}{\omega_0^4}\sin^2\theta \propto \frac{1}{\lambda^4}$
  - *Réflexion/réfraction* :
    - formules de Fresnel :
      $T_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2\cos\alpha_i\sin\alpha_t}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)\cos(\alpha_i-\alpha_t)}$
      $R_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = -\frac{\tan(\alpha_i-\alpha_t)}{\tan(\alpha_i+\alpha_t)}$
      $T_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\cos\alpha_i\sin\alpha_t}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)}$
      $R_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = -\frac{\sin(\alpha_i-\alpha_t)}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)}$
    - angle de Brewster : $(\alpha_i + \alpha_t = \frac{\pi}{2})$
      $\tan\alpha_i = \frac{n_2}{n_1}$ tq. $E_\parallel = 0$
  - *Réseaux* :
    - $I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\frac{b\pi}{\lambda}\sin\theta}{\frac{b\pi}{\lambda}\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{Na\pi}{\lambda}\sin\theta}{\sin\frac{a\pi}{\lambda}\sin\theta}\right)^2$
    - dispersion : $D = \frac{n}{a\cos\theta} = \frac{n}{\sqrt{a^2-n^2\lambda^2}}$
    - critère de Rayleigh : $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn$