Formulaire de Physique III / IV

Fourbis qu'il faut savoir

- $R = 6.022 \cdot 10^{23}$
- densité volumique d'un gaz : $\rho = \frac{M \cdot p}{R \cdot T}$
- gaz parfait isotherme : $pV = nRT = cste$
- 1^{re} principe de la thérmodynamique : $\delta W = \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S$
- force de gravitation : $\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r = m_2 g^*$
- $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kgs^2}$
- 1 bar $= 10^5$ Pa
- $m_e = 9.10938188 \cdot 10^{-31} kg$

Approximations

- $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (|x| < 1)$

Analyse vectoriel

Définitions

- $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \left(\partial_k\right)$
- $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} f = \left(\partial_k f(\boldsymbol{x})\right)$
- div $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a} = \sum_k \partial_k a_k$
- $\nabla \cdot \nabla f = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ (lapacien scalair)
- $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) = \left(\sum_i \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_i x_k}\right)$
- $\nabla^2 \boldsymbol{a} = \sum_i \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x_i^2}$ (laplacien-vecteur)

Théorèmes (V = volume limité par la surface Σ fermée)

- $\nabla \wedge \boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow \exists\, \psi \quad$ t.q. $\quad \boldsymbol{A} = \nabla\psi$
- $\nabla \wedge \boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = 0$
- $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \Rightarrow \exists\, \boldsymbol{C} \quad$ t.q. $\quad \boldsymbol{D} = \nabla \wedge \boldsymbol{C}$
- Champ scalaire : $\psi(2) - \psi(1) = \int_1^2 \nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
- **Thm. du gradient :** $\int_\Sigma f \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla f \mathrm{d}V$
- **Thm. de Gauss :** $\int_\Sigma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\omega$
- $\int_\Sigma f\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \int_V \nabla f\, \mathrm{d}\omega$
- $\int_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \wedge \boldsymbol{a} = \int_V \nabla \wedge \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\omega$
- **Thm. de Stokes** : $\int_\Sigma (\nabla \wedge \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \oint_{\vec{C}} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ (S = surface ouverte, C = contour limitant S)

Coord. polaires ($\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$) / cylindriques

- $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\nabla \wedge \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

Elasticité

Hypothèses possibles :

- solide isotrope et en équilibre
- forces uniformement distribué
- loi de Hooke applicable
- déformation linéaire
- surface constante
- …

Loi de Hooke

- contrainte normale (*stress*) : $\sigma_x = \frac{F}{S}$
- allongement spécifique (*strain*) : $\varepsilon_k = \frac{\Delta l_k}{l_k}$
- **Loi de Hooke** : $F \propto \varepsilon_x, \quad \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ (E = *module de Young*)
- **Loi de Poisson** : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ (ν = *module de Poisson*)
- pincipe de **superposition** valable : $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$

Compression uniforme ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$)

- superposition $\Rightarrow\ \varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = -\frac{p}{E}(1-2\nu) = \varepsilon_y = \varepsilon_z$
- *volume strain* : $\frac{\Delta V}{V} = \sum_k \varepsilon_k = -3\frac{p}{E}(1-2\nu)$
- coef. de compressiblilité (*bulk modulus*) : $\Delta V = -\kappa \cdot V \cdot \Delta p\,, \kappa = \frac{3(1-2\nu)}{E}$

Cisaillement

- **Loi du cisaillement simple** : $\gamma = \frac{1}{G}\tau$ ($\tau = \sigma_{\text{tangentielle}}$)
- module de cisaillement (*shear modulus*) : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
- *force sur face suppérieure, D = diagonale* : $\gamma = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{l} = 2\frac{\Delta D}{D}$
- $G = 0$ pour un fluid
- ΔV accompagnant un cis. est 0 au 1^{er} ordre
- **Torsion :**
  tube : $\tau = \frac{\mathrm{d}F}{e\ \mathrm{d}u} = G \cdot \gamma, \quad \gamma = \frac{r\ \alpha}{L}$
  $\Rightarrow M_{\text{tube}} = \int_{u=0}^{2\pi r} \mathrm{d}F \cdot r = 2\pi G \frac{r^3}{L}\alpha e$
  cylindre : $M_{\text{cyl}} = \int_{r=0}^{R} M_{\text{tube}}(r = \mathrm{d}r)$

Energie mécanique élastique

- Traction simple d'un solide : $W = \int_0^{\Delta l_x} F_x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x \cdot V$
- Compression uniforme : $W = -\int_0^{\Delta V} p\ \mathrm{d}V = -\frac{1}{2}p(\sum_k \varepsilon_k) \cdot V$
- Cisaillement simple : $W = \frac{1}{2}\tau\gamma \cdot V$

Comportement visqueux

- *Fluide newtonien :* $F_t \propto v_t$
- *Condition de non-glissement :* $v_t(z=0) = 0, v_t(z=e) = v_t$
- Coef. de viscosité dynamique : $\boldsymbol{F}_t = \eta\frac{S}{e}\boldsymbol{v}_t$ (η = *ceof. de visc.*)
- $\tau = \eta\dot{\gamma} \qquad$ ($\dot{\gamma}$ = *vitesse de cisaillement*)
- compression uniforme d'un liquide : $\Delta p = -\sigma = -\frac{1}{\kappa}\frac{\Delta V}{V} - \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$

Viscoélasticité

- *Traction : $F = \underbrace{k\,x}_{\text{ressort}} + \underbrace{\eta\,\dot{x}}_{\text{dashpot}} \Rightarrow x(t) = A(t)\,e^{-\frac{k}{\eta}t}$*
  $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{F(t)}{\eta}e^{-\frac{k}{\eta}t} \Rightarrow A(t)$
  $\Rightarrow x(t) = \frac{F(t)}{k} + Ce^{-\frac{k}{\eta}t}$
- *Cisaillement :* $\tau_z = G \cdot \gamma + \eta\dot{\gamma}$
  $\Rightarrow \gamma(t) = \frac{\tau_z}{G}\left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right)$

Efforts internes

- $\mathrm{d}S = -\mathrm{d}S'$
- $\mathrm{d}F = -\mathrm{d}F'$

Flexion (barre encastré)

- $\varepsilon(\eta, x) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(R+\eta)\mathrm{d}\theta - R\mathrm{d}\theta}{R\mathrm{d}\theta} = \frac{\eta}{R(x)}$
- $M_n = \int \eta\sigma_n \mathrm{d}S = \frac{E}{R}\int \eta^2 \mathrm{d}S = F(L-y)$
- $I = \int [\rho\ \mathrm{d}x]\ \eta^2 \mathrm{d}S\ \Rightarrow\ \sigma_n = \frac{F}{I}\eta(L-y)$
- courbure : $\frac{1}{R} = \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}y^2} = \frac{M_n}{EI} = \frac{F(L-y)}{EI}$
- $\xi(y) = \frac{F}{EI}\left(\frac{Ly^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) + Cy + D$
  $\xi(0) = 0 \quad et \quad \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y}(y=0) = 0 \Rightarrow C = D = 0$
  $\xi(L) = \frac{F}{EI}\frac{L^3}{3}$
- M_n max $\Leftrightarrow I$ max $\Rightarrow I_{bar} = \frac{a^3 b}{12}$

Flambage

- $M = \frac{EI}{R} = Pw, \quad \frac{1}{R} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}$
  $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{F}{EI} \cdot w(x)$
- $w(x) = K\sin(\sqrt{\frac{F}{EI}}\ x)$ (*petits déflections*)
- $w(x = L) = 0\ \Rightarrow F^{\text{crit}} = \pi^2\frac{EI}{L^2}$ **(Euler force)**

Tenseur des contraintes

- $\sigma_{ki}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mathrm{d}F_k^i}{\mathrm{d}S_i}$, tenseur symétrique $\rightarrow$ axes principaux
- $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (\sigma_{ki}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
- $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{F}_n + \mathrm{d}\boldsymbol{F}_t$
  $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_n = (\mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n}$
- **Equation d'équilibre :** $(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_k) + b_k = 0$

Tenseur des déformations

- $\varepsilon_{ki}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ (*petits déplacements*)
- pour un cisaillement ($\varepsilon_{ii} = 0\ \forall i$) : $\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cong \gamma_2, \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cong \gamma_3 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\gamma}{2}$
- $\exists$ axes principaux tq $\varepsilon_{ik} = 0\ \forall i \neq k$
- $\text{Tr}(\varepsilon)$ = variation de volume de corps
- déformation $\rightarrow$ cisaillement+compression uniforme :
  $$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(Tr)(\varepsilon)\delta_{ij}}_{\varepsilon_{ij}^{\text{cisaillement}}} + \underbrace{\frac{1}{3}(Tr)(\varepsilon)\delta_{ij}}_{\varepsilon_{ij}^{\text{compression}}}$$
- Condition de compatabilité (2 dim.) : $\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}$

Energie de déformation élastique

- $\Delta W = \sum_{i,k}\int_\Omega \sigma_{ki} \cdot \delta\varepsilon_{ki} \cdot \mathrm{d}w$

Solide Hookéen

- loi constitutive : $\sigma_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$
- solid isotrope : $\sigma_{ik} = \lambda \cdot Tr(\varepsilon) \cdot \delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}$
  μ, λ : coeff. de Lamé
  $\mu = G, E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}, \lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$
  $\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ Tr(\varepsilon)\ \delta_{ik})$
  $\varepsilon_{ik} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ik} - \frac{\nu}{E}\ Tr(\sigma)\ \delta_{ik}$

Fluide newtonien

- loi constitutive : $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ik} + \eta^*\dot{\varepsilon_{ll}}\delta_{ik},\ \varepsilon_{ll} = Tr(\varepsilon)$
- $\eta' = \eta^* + \frac{2}{3}\eta$
- $\eta' = 0\ \Rightarrow\ \eta^* = -\frac{2}{3}\eta$

Physique des fluides

Hypothèses possibles :

- écoulement stationnaire/permanent/laminaire/plan/…
- fluide incompressible
- fluide non visqueux
- écoulement de Poiseuille (stat. + cond. cyl. + liq. incomp.)
- goutte/bulle/…sphèrique
- pesenteur/force d'Archimède négligée

Description d'Euler

- $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\ \boldsymbol{v}$

Définitions

- *ligne de courant :* $\frac{\mathrm{d}x_1}{v_1(\boldsymbol{x},t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{v_2(\boldsymbol{x},t)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{v_3(\boldsymbol{x},t)}$
- **Tourbillon** (Vortex) : $T = \frac{1}{2}\nabla \wedge \boldsymbol{v}$
- *Ecoulement stationnaire :* $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial t} = 0$
- *Ecoulement laminaire :* $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} \neq 0, \boldsymbol{v}_A(t) \| \boldsymbol{v}_B(t)$

Equation de continuité

- forme globale : $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega \sigma_A \mathrm{d}\omega - \int_\Sigma \boldsymbol{J}_A \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega a\mathrm{d}\omega = \int_\Omega \frac{\partial a}{\partial t}\mathrm{d}\omega$
- forme locale : $\frac{\partial a}{\partial t} = \sigma_A - \nabla \cdot \boldsymbol{J}_A$
- d'ordinaire : $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$

Conservation de la masse d'un fluide

- globale : $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\omega + \int_\Omega \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}\omega = 0$
- locale : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$
- **fluide incompressible** (ρ = cste) : $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$

- **Débit** : $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_\Sigma \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \quad [\frac{m^3}{s}]$
  ($Q > 0 \Rightarrow$ puits, $Q < 0 \Rightarrow$ source)
  écoulement permanent : $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$
- **Débit massique** : $Q_m = \int_\Sigma \rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \quad [\frac{kg}{s}]$
- fluide incomp. parfait : $\int_\Sigma \boldsymbol{v}\mathrm{d}\sigma = \int_{S_1} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\sigma + \int_{S_2} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\sigma$
  $\Rightarrow v_2 = v_1\frac{S_1}{S_2}$
- écoul. stat. : $\nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = 0 \Rightarrow \int_\Sigma \rho\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\sigma = 0$

Fonction de courant Ψ : $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \rightarrow \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$

- $\boldsymbol{A}$ = potentiel vecteur des vitesses
- fluide incomp. : $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}$
- écoulement plan : $\boldsymbol{v} = (v_x(x,y), v_y(x,y), 0)$
  $\Rightarrow v_x = \frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}$
- Ψ = cste $\Rightarrow$ lignes de courant

Potentiel des vitesses Φ :

- $\nabla \wedge \boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \exists \Phi$ t.q. $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$
- Source/puits *linéique* : $\Psi = \pm\frac{Q}{2\pi b}\theta, \quad \Phi = \frac{Q}{2\pi b}\ln r$
- Tourbillon *linéique* : $\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r, \quad \Phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$
  Γ = circulation

Dynamique des fluides parfaits

- **équation d'Euler :** $\rho\boldsymbol{g} - \nabla p = \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$
- écoulement stat. : $\rho\boldsymbol{g} - \nabla(p + \rho\frac{v^2}{2}) = -2\rho\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{T}$
- **équation de Bernoulli :**
  - fl. parfait incomp. : $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cste$
  - champ vit. non-stat. : $\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g z = cste$
- **Applications de Bernoulli** :
  - Puissance hydrolique : $P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = pSv = Qp$
  - Tube Venturi : $Q_m = \rho v_2 S_2 = S_2\sqrt{\frac{2\rho(p_1-p_2)}{1-(S_2/S_1)^2}}$
  - Tube Pitot : $v_x = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_A - p_B)}$
  - Formule de Torricelli : $v_B = \sqrt{2gh}$
  - Effet Magnus : $F_p = C_p\rho S\frac{v_\infty^2}{2}, F_t = C_t\rho S\frac{v_\infty^2}{2}$
    - $\tan\theta = \frac{F_t}{F_p} = \frac{C_t}{C_p}$
    - point de fonctionnement : droite tangente passant par $O \to \theta_{\text{min}}$
    - θ_{min} = angle minimal pour que le planeur vole
    - aile en décrochage : $\alpha > 15°$ (α = angle d'attaque)
- Kelvin : $\oint_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = cste$ (ligne fluide fermée)
- Helmoltz : $I = \oint_\Gamma v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_\Sigma \nabla\wedge\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = cste \quad \forall\Gamma, t$

Statique des fluides

- Mouvements rélatifs :
  - $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$
    $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_a(O_r) + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{r}$
  - $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c + \boldsymbol{a}_r$
    $\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_a(O_r) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{r})$
- Equilibre absolu dans R_i :
  - $\rho\boldsymbol{g} - \nabla p = 0$
  - $\mathrm{d}p + \rho g\mathrm{d}z = 0$
- Equilibre relatif dans R :
  - $\rho\boldsymbol{g} - \nabla p - \rho\boldsymbol{a}_e = 0$
  - $-\mathrm{d}p + \rho(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_e)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$
- **Application dans un réf. d'inertie**
  - Manomètre : $p = p_{\text{atm}} + \rho g h$
  - Baromètre : $p = p_s + \rho g h \cong \rho g h$
  - Principe de Pascal : $F_2 = \frac{S_2}{S_1}F_1$
  - Thm. d'Archimède :
    - $\boldsymbol{F}_p = \int_\Sigma -p\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V -\nabla p\mathrm{d}V = -m_f\boldsymbol{g}$
    - Par l'équation d'Euler :
      $-\boldsymbol{F}_p = \int_V \nabla p\mathrm{d}V = \int_V \rho\boldsymbol{g}\mathrm{d}V - \int_V \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$
      $\rho = cste \Rightarrow \boldsymbol{F}_p = -\rho V(\boldsymbol{g} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t})$
  - Equilibre fl. compressible : $\int\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p + \boldsymbol{g}\boldsymbol{z} = cste$
- **Application dans un réf. non inertiel**
  - réc. en rot. : $p(r,z) = p(0,z_0) - \rho g(z - z_0) + \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2}$
  - accéléromètre : $a_e = g\tan\alpha$

Dynamique des fluides réels

- **Equation de Navier-Stokes :**
  $\rho\boldsymbol{g} - \nabla p + (\eta+\eta^*)(\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})) + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} = \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$
  fl. visq. incomp. :
  - $\rho\boldsymbol{g} - \nabla p + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} = \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$
  - $\nabla^2\boldsymbol{T} - \frac{\rho}{\eta}\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\eta}\nabla\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{T})$
- Ecoulement de Poiseuille :
  - écoul. stat., fluide incomp. visq., conduite cyl.
  - $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
  - $Q = \int_0^R v(r)2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\pi\Delta p}{8\eta L}R^4 \quad [\frac{m^3}{s}]$
- Nombre de Reynolds :
  - $R = \frac{\rho D v}{\eta}$, $R_c \cong 2300$, similitude : $R_1 = R_2$
- Ecoulement de Stokes : $F = ARv_\infty\eta$, sphère : $A = 6\pi$

Physique des surfaces

- Membrane : 2 faces   Surface : 1 face
- $\rho_{\text{eau}} = 1000\frac{kg}{m^3}, \rho_{\text{air}} = 1.2\frac{kg}{m^3}, \rho_{\text{mercure}} = 13590\frac{kg}{m^3}$
- **Équations de Gibbs :**
  - Energie vol. : $\mathrm{d}U_\alpha = T\mathrm{d}S_\sigma - p_\alpha\mathrm{d}V + \sum\mu_{i\alpha}\mathrm{d}m_{i\alpha}$
  - Energie sup. : $\mathrm{d}U_\sigma = T\mathrm{d}S_\sigma + \gamma\mathrm{d}A + \sum\mu_{i\sigma}\mathrm{d}m_{i\sigma}$
  - En. libre sup. : $\mathrm{d}F_\sigma = \gamma\mathrm{d}A + S_\sigma\mathrm{d}T + \sum\mu_{i\sigma}\mathrm{d}m_{i\sigma}$
  - Tension superficielle : $\gamma = \frac{F}{L}$
  - Membrane : $F_{\text{tot}} = 2\cdot F = 2\cdot\gamma L$
- Loi de Laplace (membrane) : $p_{int} - p_{ext} = 4\gamma\Gamma$
- Loi de Laplace (surface) : $p_{int} - p_{ext} = 2\gamma\Gamma$
- **Courbure de Gauss :** $\Gamma = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$
  - convexe : $\Gamma < 0$ concave : $\Gamma > 0$
  - *bulle* : vol. de gaz limité par une membrane liquide (sphèrique : $\Gamma = \frac{1}{R}, R > 0, p_i > p_e$)
  - *goutte* : vol. de liq. entouré d'un gaz (sphèrique : $\Gamma = \frac{1}{R}, R > 0, p_l > p_g$)
  - *cavité* : vol. de gaz prisonnier ds un liq. (sphèrique : $\Gamma = \frac{1}{R}, R < 0, p_g > p_l$)
  - surface ouverte $\Sigma : \Gamma \equiv 0$
  - pression de vapeur sat. : $p_s(r) = p_s(\infty)e^{\frac{2\gamma V_m}{RTr}}$
- **Capilarité :** phase sup. en contact avec >2 phase vol.
  - $\cos\theta_0 = -\frac{\gamma_{sl} - \gamma_{sg}}{\gamma_{lg}}$
  - $\gamma_{sl} < \gamma_{sg}$: liq. moullant
    $\gamma_{sl} > \gamma_{sg}$: liq. non moullant
  - Goutte liq. sur surface sol. : $\gamma_{lg}\cos\theta + \gamma_{sl} - \gamma_{sg} = 0$
    $\to \theta < \frac{\pi}{2}$: le liq. mouille le solide
  - Goutte liq. (a) sur surface liq. (b) :
    $\gamma_{bg}\cos\theta_{bg} = \gamma_{ab}\cos\theta_{ab} + \gamma_{ag}\cos\theta_{ag}$
  - Goutte dans récipient fermée : $p_\alpha - p_\beta = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V_\alpha}$
    (α = liquide, β = gaz)
  - Longeur capilaire : $L_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$
    $\to$ gravité prépondérant lorsque $L_c > 1$
    $\frac{\Delta p_g}{\Delta p_c} = \frac{\rho_{liq} g h}{2\gamma/R} \approx \frac{\rho_{liq} g r^2}{\gamma}$
  - **Loi de Jurin** (ascension capillaire) : $h = \frac{2\gamma_{lg}\cos\theta}{\rho_{liq} g r}$

Electromagnétisme

- $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})$
- charge élémentaire : $|e| = 1.6\cdot10^{-19} \quad [C] = [As]$
- densité volumique de charge : $\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\omega} \quad [\frac{C}{m^3}]$
- densité superficielle de charge : $\rho_s = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\sigma} \quad [\frac{C}{m^2}]$
- permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8.854\cdot10^{-12}\,[\frac{C^2}{m^2 N}] = [\frac{F}{m}]$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2 = 9.0\cdot10^9$

Electrostatique (charges au repos)

- **Loi de Coulomb** : $\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad [N]$
- **Champ électrique** : $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\boldsymbol{e}_r\,[\frac{V}{m}]$
  - $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$
  - pricipe de superposition : $\boldsymbol{E} = \sum\boldsymbol{E}_i$
  - ensemble continu : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega\frac{\rho(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\omega}{r^2}\boldsymbol{e}_r$
- **Loi de Gauss :** $\Phi_{\boldsymbol{v}} = \int_\Sigma(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$
  - q ponctuelle : $\Phi_{\boldsymbol{E}} = \int_{\Sigma_f}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Sigma_f}\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{r^2}$
    angle solid = $4\pi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
  - *forme locale* : $\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}$
- **Déplacement électrique** : $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$
  - $\int_{\Sigma_f}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\omega = Q \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})$
  - distr. sup. de charges : $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_s$
- **2ème loi** : $\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \quad \nabla\wedge\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0$
- **Potentiel électrique** : $\boldsymbol{E} = -\nabla V$
  - charge ponctuelle : $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$
  - $V(\text{terre}) \approx V(\infty) = 0$
  - ensemble de charges : $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Sigma_0}\frac{\rho(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\omega_0}{r}$
  - surface équipotentiel : $V = cste$; orthogonale à $\boldsymbol{E}$
  - travail : $W_{A\to P} = -q(V(P) - V(A))$
- **Eq. de Poisson** : $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, **Laplace** : $\rho(\boldsymbol{x}) = 0$

Champ électrique et conducteurs

- **Propriétés** : $\boldsymbol{E}_{\text{int}} = 0, V_{\text{int}} = cste, \rho_{\text{int}} = 0$
  $\Rightarrow$ charges à la surface sur influence d'un $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$
  $\boldsymbol{E}\perp$ surface, équilibre : $\boldsymbol{E}_{\text{int}} = \boldsymbol{E}_{\text{ext}}$
  ρ_S tq. $V_{\text{int}} = cste$, $\boldsymbol{E}$ discont. au passage de la surface
- Pression électrostat. : $p = \frac{\rho_S^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = p\mathrm{d}\sigma\hat{\boldsymbol{n}}$
- Capacité : $C = \frac{C}{V}\ [F] = [\frac{s^2 C^2}{m^2 kg^2}]$
- Cage de Faraday : $E_{\text{cavité}} = 0$
- **Condensateur** : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$
  - -plan : $d \ll$ dim., $\boldsymbol{E}\perp$ plaques, $C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$
    ε_r = cste diélectrique ($\varepsilon_{\text{vide}} = 1$)
  - en série : $\frac{1}{C} = \sum\frac{1}{C_i}$, en parallel : $C = \sum C_i$
  - énergie : $E_c = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2\ [J]$
  - densité d'énergie : $e_c = \frac{E_c}{vol.} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Champ électrique dans la matière diélectrique

- **Diplôle diélectrique** :
  - moment dipolaire él. : $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}\ [Cm]$, $\boldsymbol{a} : -q \to +q$
  - $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_r}{r^2}$
  - $\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\hat{\boldsymbol{e}}_r(\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}}{r^3}$
  - molécules polaires : $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$
    $E_{\text{pot}} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$
- **Polarisation, susceptibilité électrique**
  - polarisation : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = n\boldsymbol{p}\,[\frac{C}{m^2}]$
  - en générale : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \chi_e = \varepsilon_r - 1$
  - ferroélectriques : $\chi_e \approx 1000$, pol. sans $\boldsymbol{E}$
  - piézoélectriques : déformation mécanique $\to$ pol.
  - pyroélectriques : échauffement $\to$ pol.
- diél. ds un condensateur : $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}', \boldsymbol{E}' = -\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0}$
  $\rho_S = \pm P$
- Champ él. microsc. : $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\boldsymbol{E}_\mu(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}^3\eta$
- première loi : $\int_\Sigma(\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = Q_l$
- **Champ de déplacement** : $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$
- pol. prop. au ch. el. : $\boldsymbol{F} \approx \frac{\varepsilon_0\chi_e}{2}\nabla E^2\cdot$ vol.
- $\boldsymbol{E}, V, \boldsymbol{F}$: calculer avec $\varepsilon_0 \to \varepsilon_0\varepsilon_r$
- **Généralisation du modèle dipolaire** (ens. des ch.)
  - $V(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}_0\|}\sum_i q_i\sum_{l=0}^\infty\left(\frac{\|\boldsymbol{\xi}_i\|}{\|\boldsymbol{r}_0\|}\right)^l P_l(\cos\theta_i)$
  - $P_l(\cos\theta_i)$ = polynômes de Legendre
    $P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\sqrt{1 - 2tz + t^2}\,t^{-(n+1)}\mathrm{d}t$
  - contrib. coulombienne : $V^0(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}_0\|}\sum_i q_i$
  - contrib. dipolaire : $V^1(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_0}{\|r_0\|^3}$
    moment dipolaire : $\boldsymbol{p} = \sum_i q_i\boldsymbol{x}_i$
  - contrib. quadrupolaire : $l = 2$
- Milieu polarisé uniformément : ($\rho = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$)
  - $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{aux}}$
  - $\boldsymbol{E}_{\text{aux}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega\rho_0\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^3}\mathrm{d}\omega$
  - $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\rho_0}(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_{\text{aux}}$
- Sphère uniformément polarisée :
  - $V_{\text{int}} = \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0}, \quad V_{\text{ext}} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}$
  - $\boldsymbol{E}_{\text{int}} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}, \quad \boldsymbol{E}_{\text{ext}} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0}\frac{3(\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_r)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \boldsymbol{P}}{r^3}$
  - $\boldsymbol{D}_{\text{int}} = \frac{2\boldsymbol{P}}{3}, \quad \boldsymbol{D}_{\text{ext}} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$
- Sphère diélectrique dans un ch. él. ext. :
  - $\boldsymbol{E}_{\text{int}} = \frac{3\boldsymbol{E}_0}{3+\chi_e}, \boldsymbol{D}_{\text{int}} = \frac{3(1+\chi_e)}{3+\chi_e}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0,$
    $\boldsymbol{P}_{\text{int}} = \frac{3\chi_e}{3+\chi_e}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$
  - $\boldsymbol{E}_{\text{ext}} = \boldsymbol{E}_0 + \frac{R^3}{3\varepsilon_0}\frac{3(\boldsymbol{P}_{\text{int}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_r)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \boldsymbol{P}_{\text{int}}}{r^3},$
    $\boldsymbol{E}_{\text{ext}} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_{\text{ext}}, \boldsymbol{P}_{\text{ext}} = 0$
  - $\chi_e = 0$: vide, $chi_e \to \infty$: conducteur

Courant électrique stationnaire

- **Densité de courant, courant électrique**
  - éq. de continuité : $\int_{\Sigma_f}\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = -\int_\Omega\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\mathrm{d}\omega$
    forme local : $\nabla\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$
  - **densité de courant** : $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t) = \rho\boldsymbol{v} \quad [\frac{C}{s\,m^2}] = [\frac{A}{m^2}]$
  - **courant électrique** : $I = \int_\Sigma\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \quad [A]$
  - courant continu (stat.) : $\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x})}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0$
  - sens du courant opposé au direction de mvt des e^-
  - vitesse des e^- dans le vide : $a = \frac{eE'}{m}$
- **Loi d'Ohm** : $V = RI$, R = résistance $[\Omega]$
  - $\boldsymbol{J}\parallel\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{RS}{L}\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} = -\sigma\nabla V$
    ρ = conductivité $[\Omega m]$, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ = conductivité $[\frac{S}{m}]$
  - résistance : $R = \frac{\rho L}{S}\ [\Omega],\ \rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$
    en série : $R = \sum_i R_i$, en parallel : $\frac{1}{R} = \sum_i\frac{1}{R_i}$
  - semi-cond. : $R \propto T^{-1}$, suprac. : $R \approx 0$ si $T < T_C$
  - effet Joule : $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R}$
- **Force électromotrice (fem)** : $\varepsilon = V + R_i I$
- 1ère loi de Kirchhoff : $\sum_i I_i = 0$ ds un noeud
  2ème loi de Kirchhoff : $\sum_k R_k I_k + \sum_j\varepsilon_j = 0$ (maille)

Magnétostatique

- **Force de Lorentz** : $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B})$
  - force magnétique : $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$, $\overline{\boldsymbol{B}}_{\text{terre}} = 2 \cdot 10^{-5} T$
    $\boldsymbol{F}_{\text{mag}}$ force passive $\rightarrow$ pas de changement de E^{cin}
  - $\boldsymbol{B}$ uniforme et $\perp \boldsymbol{v}_0$: trajectoire cercle de
    $R = \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2mE^{\text{cin}}}}{qB}$, $f_{\text{cyclo}} = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{m}B$
  - $\boldsymbol{B}$ uniforme et *ne pas* $\perp \boldsymbol{v}_0$: traj. hélicoïdale
  - bouteille magnétique : Sym. axiale, $B_{\text{extr.}} > B_{\text{centre}}$
  - courant dans un conducteur : $\boldsymbol{F} = I \int_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{B}$
  - spire rect. : $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{B}$, moment mag. : $\boldsymbol{m} = IS\hat{\boldsymbol{e}}_n$
    $\Delta E^{\text{pot}}_{\alpha_0 \to \alpha} = -\|\boldsymbol{m}\| B(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$
  - effet Hall : $V_H = \frac{IB}{nqb}$, n dens. de charges libres
- **Champ d'ind. mag. créé par des charges en mvt**
  - **loi de Biot-Savart** : $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_\tau \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r}{r^2} \mathrm{d}l$
  - perméabilité mag. du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{mA}\right]$
  - fil rectiligne ($l = \infty$) : $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
  - spire (rayon a), sur l'axe : $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{e}}_z$
  - *dipôle magnétique* : loin de la spire $\rightarrow B(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$
    m = moment dipolaire magnétique
  - bobines de Helmholtz : 2 spires, $d = a$, ch. homogène
  - solénoïde : $B = \mu_0 I n$, $n = \frac{\text{\# spires}}{\text{unité de long.}}$
- **Lois fondamentales de la magnétostatique**
  - *flux magnétique* : $\phi_{\boldsymbol{B}} = \int_{\Sigma_f} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ [Weber]
    forme locale : $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
  - *loi d'Ampère* : $\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_j I_j = \mu_0 \int_\Sigma \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$
    forme locale : $\nabla \wedge \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$
- **Potentiel vecteur** : $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \nabla \wedge \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$
  - $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\phi \Rightarrow \nabla \wedge \boldsymbol{A}' = \nabla \wedge \boldsymbol{A}$
  - choix de $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow$ choix de jauge
  - $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$
    jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$) : $\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$
  - ext. d'un fil : $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_L \frac{I}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \mathrm{d}\boldsymbol{l}$
- **Potentiel vecteur + dipôle magnétique**
  - $\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{m} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r}{r^2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$, $\boldsymbol{m} = I\pi R^2 \hat{\boldsymbol{e}}_z$
  - $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \boldsymbol{m}}{r^3}$

Aimantation de la matière

- **Moment magnétique et aimantation**
  - courant particulaire de l'e^- : $I = \frac{e}{2\pi a} v$ $[A]$
    moment dipôlaire magnétique : $\boldsymbol{m} = \frac{q}{2}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{v}$ $[Am^2]$
  - aimantation : $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Omega}\sum_i \boldsymbol{m}_i [\frac{A}{m}]$, $M = I_m$
    cylindre long et mince : $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{M}$
  - dipôle mag., translation : $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$
- **Champ magnétique** : $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}\,[\frac{A}{m}]$
  - $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_l \qquad \nabla \wedge \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_l$
  - $B_\perp$ et $H_\parallel$ sont continues au passage de 2 matériaux
- **Susceptibilité magnétique et perméabilité relative**
  - $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$, χ_m = susceptibilité magnétique
  - $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, $\mu = \mu_r\mu_0 = (1 + \chi_m)\mu_0$
    μ = perméabilité du milieu, μ_r = perméabilité relative
- diamagnétiques : $\chi_m < 0, \mu_r \approx 1, M = 0$ sans B_{ext}
- paramagnétiques : $\chi_m > 0, \mu_r \approx 1, M = 0$ sans B_{ext}
- ferromagnétiques : $\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$
- pot. vect. + ch. d'ind. mag. + milieu aimanté :
  $\boldsymbol{B} = \nabla \wedge \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\rho_0}[\boldsymbol{M}\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\text{aux}} - (\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}_{\text{aux}}]$
- champs d'une sphère uniformement aimanté :
  $\boldsymbol{B}_{\text{int}} = \frac{2}{3}\mu_0 \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 R^3}{3}\frac{3(\boldsymbol{M} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \boldsymbol{M}}{r^3}$
  $\boldsymbol{H}_{\text{int}} = -\frac{\boldsymbol{M}}{3}$, $\boldsymbol{H}_{\text{ext}} = \frac{\boldsymbol{B}_{\text{ext}}}{\mu_0}$
- sphère mag. + champs mag. :
  intérieur : $\boldsymbol{B}_i = \frac{3(1+\chi_m)\boldsymbol{B}_0}{3+\chi_m}$,
  $\boldsymbol{M} = \frac{3\chi_m}{3+\chi_m}\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}$, $\boldsymbol{H}_i = \frac{3}{3+\chi_m}\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}$
  extérieur : $\boldsymbol{H}_e = \frac{\boldsymbol{B}_e}{\mu_0}$,
  $\boldsymbol{B}_e = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\chi_m}{3+\chi_m}\frac{R^3}{r^3}[3(\boldsymbol{B}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \boldsymbol{B}_0]$

Induction électromagnétique

- loi de Lenz : $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t}$
- **Loi d'induction** : $\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$
  forme locale : $\nabla \wedge \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$
- **self-induction/induction mutuelle** :
  - coef. de self-ind. : $L_1 = \frac{\phi_{11}}{i_1}$ [Henry]
  - coef. d'ind. mutuelle : $M = \frac{\phi_{12}}{i_1}$ $[H]$
- Energie méc. d'un self : $E_m = \frac{1}{2}LI_0^2$
- transformateur : $\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{M}{L} = \frac{N_2}{N_1} \quad (= \frac{i_1(t)}{i_2(t)})$

Circuits électriques en régime non-stationnaire

- **régime transitoire** :
  - condensateur : $v_C(t) = \varepsilon\left(1 - \exp(-\frac{t}{RC})\right)$
    $i_C(t) = \frac{\varepsilon}{R}\exp(-\frac{t}{RC})$, cste de temps : $\tau = RC$
  - self : $i_L(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L}t))$,
    $v_L(t) = \varepsilon \exp(-\frac{R}{L}t)$, $\tau = \frac{L}{R}$
- **régime sinusoïdal** :
  - $v(t) = V\cos(\omega t)$, $i(t) = I\cos(\omega t - \phi)$
  - $i(t) = \mathrm{Re}(Ie^{j(\omega t - \phi)}) \rightarrow$ diagramme des phaseurs
  - $V_{\text{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t}$
  - résistance : $v(t) = Ri(t) \Rightarrow i = \frac{V}{R}\cos\omega t$
  - condensateur : $i(t) = C\omega V\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$
  - self : $i(t) = \frac{V}{\omega L}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$
  - RCL série : $i(t) = I\cos(\omega t - \phi)$
    $\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$, $I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$
  - impédance : $Z = |Z|e^{j\delta}$
    $Z_R = R$, $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, $Z_I = j\omega L$
    $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$, $\tan\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$
  - puissance active : $P = \frac{VI}{2}\cos\delta$
- filtres électriques :
  - fréquence de coupure : ω_0 tq. $P = \frac{1}{2}P_{\max}$
  - low-pass (L-R) : $\frac{\tilde{v}_2}{\tilde{v}_1} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{R}{L}$
  - high-pass (C-R) : $\frac{\tilde{v}_2}{\tilde{v}_1} = \frac{1}{1 - j\omega_0/\omega}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Equations de Maxwell

Forme locale	Forme intégrale
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	$\int_{\Sigma_{\text{fermé}}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\omega$
$\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\int_{\Sigma_{\text{fermé}}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$
$\nabla \wedge \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

- $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$: densité de courant de déplacement
- $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$
  linéaire, isotrope : $\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$
- $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$
  linéaire, isotrope : $\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$
- milieu conducteur : $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$
- $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla \wedge \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$

Energie électromagnétique

- Travail de la force de Lorentz : $\frac{\delta W}{\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\omega} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$
- $\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u_{\text{EM}}\mathrm{d}\omega = -\int_{\Sigma_f} \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - \int_\Omega \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\mathrm{d}\omega$ $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t)$:
  courant d'énergie électromagnétique $[\frac{W}{m^3}]$
- $\frac{\partial u_{\text{EM}}}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{S} + \sigma_{\text{EM}}$
  $\sigma_{\text{EM}} > 0$: prod. d'énergie, $\sigma_{\text{EM}} < 0$: perte d'énergie
- **vecteur de Poynting** : $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}$
  $\frac{\partial u_{\text{EM}}}{\partial t} = \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
- milieux linéaires : $u_{\text{EM}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu_r} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$

Ondes

Ondes indéformables

- **progressive** : $\xi(x, t) = \xi(x - ut)$
- retrograde : $\xi(x, t) = \xi(x + ut)$
- u = vitesse de propagation (célérité)
  Attention : $u \neq v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$
  Déplacement transversal des particules ! !
- **Eq. de d'Alembert** : $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$
- longitudinale : $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{u}$, transversale : $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$
- **onde sinusoïdale/harmonique** :
  - $\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin(k(x - ut)) = \Psi_0 \sin(kx - \omega t)$
    Ψ_0 : amplitutde
  - longeur d'onde : λ tq. $\xi(x + \lambda, t_0) = \xi(x, t_0)$
  - nombre d'onde : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (nbr. de λ dans 2π)
  - période : T tq. $\xi(x_0, t + T) = \xi(x_0, t)$
  - fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{u}{\lambda}$ [Hz]
  - pulsation : $\omega = 2\pi f = ku$
  - source $\Rightarrow \lambda, f$; milieu $\Rightarrow u$
  - milieu dispersif : $u = u(\lambda)$, non-disp. : $u = cste$
- **onde plane :**
  - **Eq. de d'Alembert (3D)** : $\nabla^2 \Psi(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$
  - **onde plane** : $\Psi_1(\boldsymbol{x}, t) = \sum_\pm \Psi_1(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{x} \pm ut)$
    vit. de prop. : $\boldsymbol{u} = u\hat{\boldsymbol{n}}$
    front d'onde : plan $\perp \hat{\boldsymbol{n}}$ tq. $\Psi = cste$
  - onde plan harmonique :
    $\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \Psi_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} \mp \omega t) =$
    $\mathrm{Im}\left(\Psi_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} \mp \omega t)}\right)$
    $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{n}}$
  - **onde sphèrique** : $\Psi(r, t) = \sum_\pm \frac{1}{r}\Psi_1(r \pm ut)$
    éq. de d'Alembert : $\frac{\partial^2 r\Psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial t^2} = 0$
  - **onde de pression dans un fluide parfait** :
    - éq. de d'Alembert : $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa\rho_r}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$; $u^2 = \frac{1}{\kappa\rho_r}$
    - gaz parfait : $u = \sqrt{\frac{\gamma p_r}{\rho_r}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$
    - air : $\gamma = \frac{7}{5}$, $p_r = 1atm$, $\rho_r = 1.18\frac{g}{dm^3}$,
      $T = 300K \Rightarrow u = 348\frac{m}{s}$
    - mvt piston sinusoïdal :
      - déplacement : $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$
      - pression : $p - p_r = -\frac{1}{\kappa}k\xi_0 \cos(kx - \omega t)$
      - vitesse : $v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)$
    - onde accoustique = onde de pression dans un gaz
    - $\Delta p = \pm\rho u v$
  - **onde élastique dans un barreau solide** :
    - éq. de d'Alembert : $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$; S, ρ cste
    - $u_{\text{onde longitudinale}} > u_{\text{onde de cisaillement}}$
  - **Impéndance d'un milieu** : $Z = \frac{\text{cause}}{\text{effet}}$
    - onde de pression : $Z = \frac{p(x,t) - p_r}{v(x,t)}$
    - onde élastique : $Z = \frac{\sigma(x,t)}{v(x,t)}$
    - onde transversale sur une corde : $Z = \frac{F\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}}{v(x,t)}$
    - milieu de ρ (vol./lin.) : $Z = \pm\rho u$

Autres types d'ondes

- **onde à la surface d'un liquide** :
  - $u = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}}$
    ρ : densité, γ : tension sup., h hauteur de liq.
  - $h \gg \lambda$: (ondes dispersives)
    onde de gravité : λ grand, $u^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}$
    onde capillaire : λ faible, $u^2 = \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}$
  - $h \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad u \approx \sqrt{gh}$
- pot. de vitesse : $\phi(x, z, t) = A\sin(kx - \omega t)\cosh(kz)$
- onde de Rayleigh : transversale et longitudinale
- onde le long d'une ligne électrique :
  $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$; $u^2 = \frac{1}{LC}$; V : tension él.
- onde de pression d'amplitude finie :
  $u_{\text{rel}}(x) = u_{\text{lin}} + \left(1 + \frac{B}{2A}\right)v(x)$

Aspets énergetiques

- **densité d'énergie** - onde dans un milieu matériel :
  $e(x, t) = \frac{1}{2}\rho u^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$
  onde progressive (où retrograde) : $e(x, t) = \rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$
- densité d'énergie moyenne - onde sinusoïdale :
  $\bar{e} = \frac{1}{T}\int_0^T e(x, t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$
- **intensité d'une onde** : $I = \frac{\bar{P}}{S} = u\bar{e} = Z\bar{v^2}$ $[W/m^2]$
  $P(x, t) = Sue(x, t) \Rightarrow \bar{P} = Su\bar{e}$ $[W]$
  sinusoïdale : $I = \frac{1}{2}\rho u\omega^2\xi_0^2$
- intensité d'une **onde sonore** : $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ [dB]
  $I_{0,\text{air}} = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$
- **Attenuation d'une onde** : $I(x) = I(x_0)e^{-2\alpha(x - x_0)}$
  α : coefficient d'atténuation $[m^{-1}]$

Effet Doppler

- $f' = f\frac{u - v_0}{u - v_s}$
  $v_s > 0$: le source s'approche de l'obs.
  $v_0 > 0$: l'obs. s'éloigne du source
- fréquence Doppler : $f_D = |f' - f|$
- $u \gg v_0, v_s$: $f' \approx f\left(1 - \frac{v}{u}\right)$; $v = v_0 - v_S$
- ondes electromagnétiques : $f' = f\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
- onde de choc : front d'onde = cône, $\alpha = \arcsin\frac{u}{v_s}$

Lois générales de la propagation d'ondes

- **principe de superposition** : $\Psi(x,t) = \Psi_1 + \Psi_2$
- **principe de Huyghens** : onde = superpos. de toutes les ondelettes
- **principe de Fermat** : temps de parcours d'une onde entre A et B minimal

Superposition d'ondes

- **Ondes stationnaires** :
  - onde stat. = 2 ondes dans dir. opposées
    $\Psi(x,t) = 2\Psi_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$
    noeuds : $\xi = 0\ \forall t$; ventres : ξ max.
  - $\Psi(\boldsymbol{x},t) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\theta(t) = \phi(\boldsymbol{x})\theta(t)$
  - 1D : $\Psi(x,t) = \{A\sin(kx) + B\cos(kx)\}\sin(\omega t)$
  - fréquences propres / harmoniques :
    - f_1 : fréquence fondamentale
    - corde fixé : $\lambda_n = \frac{2L}{n}, f_n = \frac{nu}{2L}$
    - colonne d'aire (ouvert aux 2 extrémités) : $f_n = \frac{nu}{2L}$
    - une extrémité fermée : $f_n = \frac{u}{\lambda} = \frac{(2n-1)u}{4L}$
- **Battments** :
  - $p - p_r = 2A\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$
    $A_1 = A_2$
    onde de $\frac{f_1+f_2}{2}$ modulée par onde de $\frac{f_1-f_2}{2}$
    fréquence de battement : $f_b = f_1 - f_2$
- **Vitesse de phase / vitesse de groupe** :
  - pulse = superpos. d'ondes sinus de fréq voisins
  - $f_1 \approx f_2, A_1 \approx A_2, k_1 \approx k_2$
    $\Psi = 2\Psi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)\cos\frac{(k_2-k_1)x-(\omega_2-\omega_1)t}{2}$
  - vitesse de groupe : $u_g = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1} \approx \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$
  - milieu dispersif : vit. de l'information = vit. de groupe
    $u = u(\omega)$, rél. de dispersion : $\omega = \omega(k)$; $u = u(k)$
  - $u_g = u + k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}k}$
- **Interféerences de sources synchrones** :
  - synchrone / cohérentes : $f_1 = f_2, \phi_1 - \phi_2 = cste$
  - $\Delta p_i(r_i,t) = \frac{A}{r_i}\sin(kr_i - \omega t)$
    $r_1, r_2 \gg \|\boldsymbol{x}_{S_1} - \boldsymbol{x}_{S_2}\|$
    $\Delta p = 2\frac{A}{r_1}\cos\frac{k(r_1-r_2)}{2}\sin\left(\frac{k(r_2-r_1)}{2} - \omega t\right)$
  - interférences constructives : $r_1 - r_2 = n\lambda$
  - interférences destructives : $r_1 - r_2 = \frac{(2n+1)\lambda}{2}$
  - (sources non synchrones : $I = I_1 + I_2$)
  - $I(P) = \frac{\overline{\Delta p^2}}{Z} = \frac{1}{Z}\left\{\overline{\Delta p_1^2} + \overline{\Delta p_2^2} + 2\overline{\Delta p_1 \Delta p_2}\right\}$
  - $r_1 \approx r_2 : I(P) = 4I_0(P)\cos^2\left(\frac{ka\sin\theta}{2} - \frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$
  - $\phi_1 - \phi_2 = 0$, max en $a\sin\theta = n\lambda$
    n = ordre de l'interférence
  - nbr. de sources > 2 $\Rightarrow$ réseaux

Interactions ondes-milieu de propagation

- **Réfraction** : mise en vibration par l'onde incidente
  - loi de Descartes : $\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_t} = \frac{u_1}{u_2}$
  - loi de Snell (ondes e.m.) : $\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_t} = \frac{n_2}{n_1}, n_i = \frac{c}{u_i}$
  - réflection totale : $u_2 > u_1$ et $\alpha_i > \frac{u_1}{u_2}$
- **Réflexion** : $\alpha_i = \alpha_r$
  - onde plane $\rightarrow$ onde plane
    onde sphèrique $\rightarrow$ onde sphèrique
  - film mince :
    interférence constructive $\Leftrightarrow 2L = \frac{(2m+1)\lambda_2}{2}$
    interférence destructive $\Leftrightarrow 2L = m\lambda_2$
    $\lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$
- **Coef. de transmission/réflexion** : $T = \frac{\xi_t}{\xi_i}, R = \frac{\xi_r}{\xi_i}$

  $T = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} \leq 0, \phi_t = 0$

  $R = \frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} \lesseqgtr 0, \phi_r = \begin{cases} 0 & (Z_2 > Z_1) \\ \pi & sinon \end{cases}$
  - $R \in [-1,1], T \in [0,2], T = 1 + R$
  - $R^2 = \frac{I_r}{I_i}, T^2 = \frac{I_t}{I_i}\frac{Z_1}{Z_2}, R^2 + T^2\frac{Z_2}{Z_1} = 1$
  - transmission totale s'il y a *adaption* ($Z_1 = Z_2$)
  - onde e.m. : $\frac{I_r}{I_i} = \frac{(n_1-n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}, \frac{I_t}{I_i} = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$
    onde incidente normale !
- **Diffraction** : $\lambda \approx d_{\text{trou}} \ll r, h_{\text{trou}} \ll \lambda$
  - Diff. de Fraunhofer : ondes inc. planes, observ. loin
  - $\Delta p(\boldsymbol{r}_0,t) = \frac{Ahb}{r_0}\frac{\sin\frac{kb\sin\theta}{2}}{\frac{kb\sin\theta}{2}}\sin(kr_0 - \omega t)$
  - $I(Q) = I_0\left(\frac{\sin\chi}{\chi}\right)^2$
    $\chi = \frac{kb\sin\theta}{2} = \frac{b\pi}{\lambda}\sin\theta, I_0 = \frac{1}{2Z}\left(\frac{Ahb}{r_0}\right)^2$
  - ouverture = disque $R \approx \lambda \Rightarrow$ tache centrale (d'Airy ; $\sin\theta = \frac{1.22\lambda}{2R_{\text{trou}}}$)+ anneaux concentriques
- **Diffusion** : obstacle de dim. $\sim \lambda \Rightarrow$ obstacle $\rightarrow$ source

Ondes électromagnétiques

- **Milieux lin. sans charge/courant** :
  (vide, air, diélectriques homogènes et isotropes)
  - d'Alembert :
    $\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$
    $\nabla^2\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$
  - vit. de prop. : $u = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r}}$
    vide : $u = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = 2.997925 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$
  - $\boldsymbol{E}(x,t) = E_{0y}\sin(kx - \omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_y$
    $\boldsymbol{B}(x,t) = B_{0z}\sin(kx - \omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_z$
    $\frac{E_{0y}}{B_{0z}} = u$, $\boldsymbol{E}$ *polarisée linéairement*
  - lumière *non polarisée* : $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$
    $E_y(x,t) = E_{0y}\sin(kx - \omega t + \phi_y(t))$
    $E_z(x,t) = E_{0z}\sin(kx - \omega t + \phi_z(t))$
  - *pol. elliptiquement* : $\phi = \phi_z - \phi_y \neq k\pi$ indép. du temps
    $\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 - \frac{2E_yE_z}{E_{0y}E_{0z}}\cos\phi = \sin^2\phi$
  - *pol. circulairement* : $\phi = \frac{(2k+1)\pi}{2}, E_{0y} = E_{0z}$
  - photons : $\varepsilon = hf$
  - densité d'énergie : $\overline{e} = \overline{u_{\text{EM}}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2, I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$
  - indice de réfraction : $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$
  - milieu dispersif : $n = n(f)$
- **Milieux anisotropes** :
  - tenseur des const. diélectriques :
    isotrope : $n_1 = n_2 = n_3$, *uni-axe* : $n_1 \neq n_2 = n_3$, *bi-axe* : $n_1 \neq n_2 \neq n_3$
  - *Biréfringence* :
    onde incidente (non pol.) = 2 ondes pol. lin. $\perp$
    $u_{\text{ord}} = \frac{c}{n_2}, \frac{c}{n_1} < u_{\text{extraord}} < \frac{c}{n_2}$
  - Polarisateur (*loi de Malus*) : $I \propto I_0^2\cos^2\theta$
- **Milieux conducteurs** : (lin. $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$)
  - $\boldsymbol{E}(x,t) = E_0 e^{-\alpha x}\sin(kx - \omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_y$
  - $\boldsymbol{B}(x,t) = B_0 e^{-\alpha x}\sin(kx - \omega t + \phi)\hat{\boldsymbol{e}}_z$
  - $\alpha^2 = \frac{-\frac{\omega^2}{u^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{u^2}\right)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2}$
  - $\mu\sigma\omega \gg \frac{\omega^2}{u^2} \Rightarrow$ prof. de pen. : $\delta = \alpha^{-1} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$
- **Propagation guidée**
  - diélectrique linéaire :
    $\boldsymbol{E}_d \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}, \boldsymbol{H}_d \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0,$
    $\boldsymbol{E}_d \wedge \hat{\boldsymbol{n}} = 0, \boldsymbol{H}_d \wedge \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{J}_s$
  - $\boldsymbol{E} = E_0\sin(k_y y)\sin(k_x x - \omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_z$
    $k_x = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}, \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}$
  - $\boldsymbol{B}$ circule autour d'où $\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ plus grand
  - fréquence de coupure : $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2a}$
  - vitesse de phase : $u = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}}$ ($> c$! ! !)
    vitesse de groupe : $u_g = c\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2} \leqslant c$
  - puissance EM moyenne : $\overline{P} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 abu_g E_0^2$
- **Superposition/interactions d'ondes EM**
  - *Diffusion* :
    - dipôle de Hertz : $p(t) = \frac{q^2}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega t$
      $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\left|\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right|\sin\theta, B = \frac{E}{c}$
      $I(r,\theta) \propto \frac{p_o^2\omega^4}{r^2}\sin^2\theta$
    - loi de Rayleigh : $I(r,\theta) \propto \frac{1}{r^2}\frac{\omega^4}{\omega_0^4}\sin^2\theta \propto \frac{1}{\lambda^4}$
  - *Réflexion/réfraction* :
    - formules de Fresnel :
      $T_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2\cos\alpha_i\sin\alpha_t}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)\cos(\alpha_i-\alpha_t)}$
      $R_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = -\frac{\tan(\alpha_i-\alpha_t)}{\tan(\alpha_i+\alpha_t)}$
      $T_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\cos\alpha_i\sin\alpha_t}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)}$
      $R_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = -\frac{\sin(\alpha_i-\alpha_t)}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)}$
    - angle de Brewster : ($\alpha_i + \alpha_t = \frac{\pi}{2}$)
      $\tan\alpha_i = \frac{n_2}{n_1}$ tq. $E_\parallel = 0$
  - *Réseaux* :
    - $I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\frac{b\pi}{\lambda}\sin\theta}{\frac{b\pi}{\lambda}\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{Na\pi}{\lambda}\sin\theta}{\sin\frac{a\pi}{\lambda}\sin\theta}\right)^2$
    - dispersion : $D = \frac{n}{a\cos\theta} = \frac{n}{\sqrt{a^2-n^2\lambda^2}}$
    - critère de Rayleigh : $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn$